

Функции. Граници и производна на функция.

I. Функции

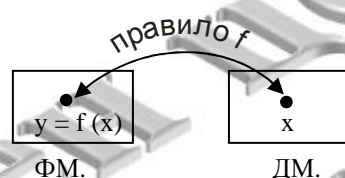
1. Определение

Ако една величина Y зависи от изменението на друга величина X , то такава зависимост се нарича функционална зависимост.

Определение:

Правилото f , посредством което на всяка стойност на X се съпоставя точно една стойност на Y , се нарича функция и обикновено се отбелязва: $y = f(x)$.

Величината X наричаме аргумент, а величината Y – функция. Стойностите, които може да заема аргумента, се наричат дефиниционно множество ДМ. или дефиниционна област на функцията, а множеството от стойности, които може да заема Y , се нарича функционално множество ФМ. (Фиг. 1).



За да бъде определена една функция, трябва да са дадени:

- ◆ Дефиниционното ѝ множество ДМ.
- ◆ Правилото f , което съпоставя на всяко $x \in \text{ДМ.}$ точно едно определено $y \in \text{ФМ.}$

2. Начини за задаване на функция:

- ◆ Таблично – Задава се чрез стойностите на наредената двойка (X, Y) , където $Y = f(X)$. Таблицата обикновено се попълва опитно или чрез наблюдение, т.е. в даденото правило задаваме стойности на аргумента X и получаваме стойностите на функцията $f(X)$.
- ◆ Аналитично – Когато правилото f е зададено чрез формула. Например:

x	-1	0	1
y	-4	-1	2

$$y = f(x) = 2x^2 - 1; \quad y = f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{за } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{за } x = 1 \\ 3x-1 & \text{за } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ако нищо не е казано за дефиниционната област ДМ. на функцията $y = f(x)$, се смята, че тя се състои от всички стойности на аргумента X , за които могат да се извършат действия посочени във формулата.

- ◆ Словесно – Когато правилото f , което съпоставя на всяко точно определено, е зададено описателно. Например: На всяко X съпоставяме най-голямото не-надминаващо го цяло число, т.е. при $X = 1,4$ имаме $Y = 1$, при $X = -1,4$ имаме $Y = -2$.
- ◆ Графично – Графика на функцията $y = f(x)$ се нарича множеството от всички точки с координати $(x, y=f(x))$, където $x \in \text{ДМ.}$, определени в правоъгълна координатна система. Всяка функция има графика. Една функция $y = f(x)$, където $x \in \text{ДМ.}$, се нарича константа, ако за всяка стойност на X функцията приема една и съща стойност и се записва $f(x) = \text{const}$. В зависимост от дефиниционното множество графиката на константната функция $f(x) = \text{const}$ е точка, права или отсечка.

3. Сложна функция

Нека да е дадена функцията $y = f(u)$, където $u = f(x)$, тогава функцията $y = f(f(x))$, се нарича сложна (съставна) или функция от функция. Например:

$$y = x + 2(x^2)^2; \quad y = \sqrt[3]{1+x^2}$$

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи

Зад. 1: Дадена е функцията $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$. Намерете

$$f(-3); \quad f\left(-2^{\frac{1}{2}}\right); \quad \frac{1}{[f(x)]^2} - 3; \quad \frac{f(-x)}{f(x-2)}$$

Решение: $f(-3) = \sqrt{4(-3)^2 + 1} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$.

- $f\left(-2^{\frac{1}{2}}\right) = f(-\sqrt{2}) = \sqrt{4(-\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3$.
- $\frac{1}{[f(x)]^2} - 3 = \frac{1}{(\sqrt{4x^2 + 1})^2} - 3 = \frac{1}{4x^2 + 1} - 3 = \frac{1 - 12x^2 - 3}{4x^2 + 1} = -\frac{12x^2 - 2}{4x^2 + 1}$.
- $\frac{f(-x)}{f(x-2)} = \frac{\sqrt{4(-x)^2 + 1}}{\sqrt{4(x-2)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4(x^2 - 4x + 4) + 1}} = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 - 16x + 17}}$.

Зад. 2: Да се реши неравенството $f(g(x)) \leq 1$, където $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = x + 1$

Решение: От лявата страна на неравенството имаме сложна функция.

- $f(g(x)) = 2^{g(x)} - 1 = 2^{x+1} - 1$.
- $2^{x+1} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow 2^{x+1} \leq 2^1 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Зад. 3: Да се намерят стойностите на параметъра a , при които параболите на функциите $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ имат единствена обща точка.

Решение: За да имат параболите единствена обща точка, то уравнението $f(x) = g(x)$ трябва да има едно решение, т.е. $x^2 - 1 = 3x^2 - 2ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0$. Това уравнение има едно решение, когато $D = 0$, т.е. $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \pm 2$. Търсените стойности са $a_{1/2} = \pm 2$.

III. Граници на функции

Теорема:

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат граница при $x \rightarrow a$, и тя е

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то

Теорема I: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$; (1)

Теорема II: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$; (2)

Следствие 1: $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot A$, където k е константа; (3)

Следствие 2: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = A^n$, където n е цяло положително число; (4)

Теорема III: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, където $B \neq 0$. (5)

Ако някое аритметично действие няма стойност, то резултатът наричаме *неопределеност*. При граници на функции имаме няколко вида неопределеност:

- ◆ Неопределеност от вида $\frac{0}{0}$: Тя се получава от (5), ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
- ◆ Неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$: Тя се получава от (5), ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
- ◆ Неопределеност от вида $\infty - \infty$: Тя се получава от (1), ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$, но $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ може, както да съществува, така и да не съществува.
- ◆ Неопределеност от вида $0 \cdot \infty$: Тя се получава от (2), ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Някои основни граници:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \text{ ако } x > 0 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \text{ ако } x < 0 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (8)$$

Следват избрани задачи

ОТ

Основни типове задачи

При решаване на задачи с граници, първо прилагаме непосредствено теоремите за граници на функции (от (1) до (5)). Ако получим число, то това число е търсената граница. Ако получим неопределеност, то решението е в зависимост от вида на неопределеността:

◆ Неопределеност от вида $\frac{0}{0}$ – За да премахнем тази неопределеност, числителят и знаменателят се преобразуват по следните начини: като се разложат на множители (при квадратен тричлен); като се изнесе общ множител пред скоби, за да се съкрати; умножаваме числителя и знаменателя със спрегнатите им изрази (един израз е спрегнат, когато при умножаването му с дадения се получава рационален израз.

Бележки:

1) Ако има корен само в числителя (или знаменателя), умножаваме само с него.
2) Ако числителят и знаменателят изглежда като формулите $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$ и т.н., за образуването на спрегнатите му се използва втората част от тези формули. **Например:** Спрегнатият на $a^3 - b^3$ е $(a^2 + ab + b^2)$.

$$\text{Зад. 4: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 + 12x - 5}{3x - 1}$$

Решение: Ако непосредствено приложим теоремите за граница на функция, ще получим неопределената форма $\frac{0}{0}$. Затова разлагаме числителя на множители:

$$9x^2 + 12x - 5 = 9 \left(x + \frac{5}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = (3x + 5)(3x - 1) \text{ и преобразуваме задачата по следния начин:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 + 12x - 5}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x + 5)(3x - 1)}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x + 5) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 3x + 5 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 6$$

$$\text{Зад. 5: } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

Решение: Имаме неопределената форма $\frac{0}{0}$. Затова умножаваме числителя и знаменателя със спрегнатия израз на числителя и преобразуваме:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2}. \text{ Прилагаме (4) и получаваме: } \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 5} x-1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{5-1} + 2} = \frac{1}{4}$$

◆ Неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ – За да премахнем тази неопределеност разделиме числителя и знаменателя с най-високата степен на неизвестното (или изнесаме неизвестното с най-висока степен) и използваме (8).

$$\text{Зад. 8: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-3x}}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x} \cdot \frac{2-0}{1+1} = -1$$

Бележка:

При решаването на тази задача използвахме, че $|x| = -x$, когато $x \rightarrow -\infty$.

◆ Неопределеност от вида $\infty - \infty$ – Тази неопределеност се премахва, като я преобразува в неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Това става, като умножим и разделим със спрегнатия израз.

$$\text{Зад. 9: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} \cdot \frac{2}{1+1} = 0.1 = 0$$

- ◆ Неопределеност от вида $0 \cdot \infty$ – Тази неопределеност се премахва, като се преобразува в неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Това става, като умножим и разделим със спрегнатия израз.

Освен граници от числови функции съществуват и граници от тригонометрични функции. Преобразуваме функцията така, че да се сведе до търсене на основна граница (от (9) до (11)).

Преобразуването на тригонометричната функция до основните граници се извършва по следните начини:

Някои основни граници:	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(9)
$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$	(10)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	(11)

- ◆ Умножаваме числителя и знаменателя с подходящо число:

Зад. 10: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}$

Решение: За да използваме основната граница (9), умножаваме числителя и знаменателя с 6 и получаваме: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \sin 6x}{6x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 6 \cdot 1 = 6$.

- ◆ Прилагаме формулите за преобразуване на тригонометрични функции:

Зад. 12: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$

Решение: Използваме Тригонометричните формули (17) и (66):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x \frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25 \cdot \sin^2 \frac{5x}{2} \cdot \cos 2x}{4 \cdot \frac{25x^2}{4} \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{25}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{25}{4} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1} = \frac{25}{4}$$

Зад. 13: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{x - \alpha}$, където α е число.

Решение: Използваме подходящи Тригонометричните формули:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos x}{(x - \alpha)(\cos x \cos \alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin(x - \alpha)}{x - \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Понеже косинусът е в знаменател, за числото α получаваме $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

III. Лява и дясна граница.

Нека една функция $y=f(x)$ да няма граница в дадена точка от ДМ (например точката на прекъсване). Нека тази точка да означим с x_0 . Методът на границите може да се използва за изучаване на функцията в околност на тази точка. Ако разгледаме функцията $y=f(x)$ само за стойности от ДМ, които са по-малки от x_0 , то получаваме нова функция $y=F(x)$. Границата на функцията $y=F(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (ако съществува) се нарича лява граница на функцията $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и се означава с $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ или

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < 0}} f(x)$$

по-големи от x_0 , то получената границата на функцията (ако съществува) се нарича дясна граница на функцията $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и се означава с $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ или

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Ако дясната и лявата граница на функция не съвпадат (т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)), \text{ то } f(x) \text{ няма истинска граница. Ако лявата и дясната гра-}$$

ница на функция съвпадат (т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$), (12)

то $f(x)$ има истинска граница.

Бележка:

Израза (12) ни дава друг начин за намиране на граница на функция, т.е. ако лявата и дясната граница около дадена точка, принадлежаща на ДМ, съвпадат, то функцията има граница в тази точка.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{4}}{x^2} = \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{1} = \frac{1}{2}$$

Основни типове задачи

Зад. 14: Да се намери лявата и дясна граница на функцията $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ при

$x \rightarrow 0$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{-x} = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Лявата и

дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x \rightarrow 0$.

Зад. 15: Да се намери лявата и дясна граница в точките на прекъсване на функциите:

$$a) y = \begin{cases} x^2 - x & \text{при } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{при } 1 < x < 2 \\ 2 - x & \text{при } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Решение: а) Прекъсването е в точките 1 и 2. Затова разглеждаме следните случаи:

А) При $x=1$ имаме

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 - x) = (1-0)^2 - (1-0) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2 - x^2) = 2 - (1+0)^2 = 1$$

т.е.лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x \rightarrow 1$.

В) При $x=2$ имаме

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (2 - x^2) = 2 - (2-0)^2 = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2 - x) = 2 - (2+0) = 0$$

т.е.лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x \rightarrow 2$.

IV. Непрекъснатост на функция.

Определение:

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точка a , ако:

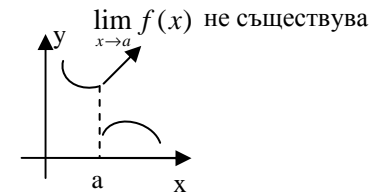
- ◆ Точката a принадлежи на Д.М. на $f(x)$;
- ◆ Функцията $f(x)$ има граница при $x \rightarrow a$ и тази граница е равна на стойността на функцията в тази точка т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ако не е изпълнено едно от горните условия, казваме, че функцията $f(x)$ е прекъсната в точката a (Фиг.2).

Ако функцията $f(x)$ не е дефинирана в точката a , но има граница в тази точка (т.е. съществува

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$), то Д.М. на функцията може да се

разшири като положим $f(a)=A$. Така функцията $f(x)$ става непрекъсната в точката a . В такъв случай казваме, че точката a е точка на отстранимо прекъсване.



Фиг.2

Например: Функцията $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точката $x = 1$ има отстранимо прекъсване, тъй като при $x = 1$ функцията $f(x)$ не съществува (защото Д.М.: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$), но границата

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2, \text{ е крайно число. Функцията може да се додефинира така, че да бъде непрекъсната и при } x = 1, \text{ по следния начин}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{при } x \neq 1. \text{ Така дефинирана функцията } f(x) \text{ е непрекъсната за } \forall x. \\ 2 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

Основни типове задачи

Зад. 16: Дадена е функцията $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$. Да се дефинира така, че в точка-та $x=0$ да е непрекъсната.

Решение: Д.М.: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Ако пресметнем $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, и ако тази граница е конкретно число, тогава за $f(0)$ ще приемем тази граница. Имаме неопределеност $\frac{0}{0}$ и затова границата намираме като умножим и разделим със спрегнатите на числителя и знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \cdot \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{-x(\sqrt{1+x}+1)} = -1 \Rightarrow f(0) = -1$$

За да бъде функцията непрекъсната и в точката 0, трябва да я запишем

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} & \text{при } x \neq 0. \text{ Така получената функция е непрекъсната за } x \in [-1; 1]. \\ -1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Зад. 18: Намерете параметъра a така, че функцията $f(x)$ да е непрекъсната за всяко x от дефиниционното си множество, ако

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{\sqrt{x-2}-3} & \text{при } x \in [2, 11) \cup (11, +\infty). \\ a & \text{при } x = 11 \end{cases}$$

Решение: $\sqrt{x-2}-3 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-2})^2 \neq 3^2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 9 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Д.М.: $x \in [2, 11) \cup (11, +\infty)$

За да определим параметъра a така, че функцията $f(x)$ да е непрекъсната в ДМ, трябва границата и в тази точка да е равна на стойността на функцията, т.е.

$$a = f(11) = \lim_{x \rightarrow 11} f(x) = \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x-11}{\sqrt{x-2}-3} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+3} = \lim_{x \rightarrow 11} \frac{(x-11)(\sqrt{x-2}+3)}{x-2-3^2} = \lim_{x \rightarrow 11} \frac{(x-11)(\sqrt{x-2}+3)}{x-11} = \lim_{x \rightarrow 11} (\sqrt{x-2}+3) = \sqrt{11-2}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

т.е. при $a=6$ функцията $f(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{\sqrt{x-2}-3} & \text{при } x \in [2, 11) \cup (11, +\infty) \\ a & \text{при } x = 11 \end{cases}$ е непрекъсната за

всяко x от Д.М.

Непрекъснатостта на дадена функция ни позволява да определяме дали тя има корени в даден интервал. Ако в краищата на интервала $[a, b]$ непрекъснатата функция $f(x)$ приема стойности с различни знаци, то уравнението $f(x) = 0$ има поне един корен в този интервал.

Теорема:

(за съществуване на корен): Ако функция $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то съществува $x_0 \in (a, b)$ такава, че $f(x_0) = 0$, т.е. уравнението $f(x) = 0$ има поне един корен в дадения интервал.

Зад. 19: Докажете, че уравнението $x^4 - x^2 - 5x - 3 = 0$ има корен в интервала $[2, 3]$.

Решение: Нека да положим $f(x) = x^4 - x^2 - 5x - 3$. Д.М. $\forall x$.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \in \text{Д.М.}; \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - x^2 - 5x - 3) = 2^4 - 2^2 - 10 - 3 = -1; \quad f(2) = -1 \\ 3 \in \text{Д.М.}; \lim_{x \rightarrow 3} (x^4 - x^2 - 5x - 3) = 3^4 - 3^2 - 15 - 3 = 54; \quad f(3) = 54 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{функцията } f(x) \text{ е}$$

непрекъсната в интервала $[2, 3]$. Но $f(2) \cdot f(3) < 0$, следователно даденото уравнение има поне един корен в искания интервал.

Теорема:

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a; b]$ и има производна (диференцируема в т. x_0), то казваме, че функцията е непрекъсната в точка x_0 .

Обратното не е вярно, т.е. ако функцията е непрекъсната в точка x_0 , то тя не винаги е диференцируема (следователно Функцията да е непрекъсната в точката x_0 е необходимото, но недостатъчно условие за диференцируемост).

V. Диференцируемост на функция.

1. Определение

Една функция е диференцируема в дадена точка, ако има първа производна в тази точка.

Първата производна на функцията y в дадена точка (виж Фиг. 2) се дефинира, като границата (ако съществува) на отношението $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (нарастването на функцията и

нарастването на аргумента), когато нарастването на аргумента клони към нула, т.е.

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ За намирането на първа производна се използва}$$

таблица №1.

2. Механичен смисъл на производната

Теорема:

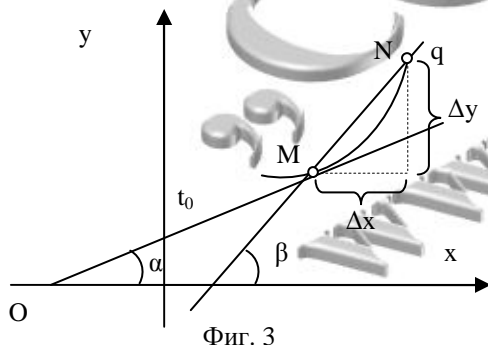
Теорема 1: Скоростта на едно тяло, движещо се по път $s = f(t)$ в даден момент t_0 , е равна на първата производна на пътя, т.е. $v = s'(t_0)$.

Теорема 2: Ускорението a на тяло, движещо се със скорост $v = f(t)$, е равна на първата производна от скоростта, т.е. $a = v'(t_0) = s''(t_0)$.

3. Геометричен смисъл на производната

Нека графиката на функцията $y=f(x)$ е кривата MN (Фиг. 3). Нека през двете точки MN да построим права q , която сключва с абсцисната ос ъгъл β . Когато точката N се приближава към точката M , права q се стреми към една гранична права t_0 . Тази гранична права се нарича допирателна към графиката на функцията $f(x)$ в дадената точка (на Фиг. 3 тази точка е M). Нека ъгълът, който сключва допирателната с оста Ox , означим с α .

Производната на функцията $f(x)$ е границата $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тангенсът на ъгъла,



Фиг. 3

когато допирателната към кривата в дадена точка сключва с абсцисната ос, се нарича ъглов коефициент на допирателната в тази точка и се означава с $k = \operatorname{tg} \alpha$. За ъгловия

$$\text{коефициент имаме следната теорема } k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad (13)$$

Изразът (13) ни дава геометричния смисъл на понятието производна, т.е. стойността на първата производна на една функция в дадена точка е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в същата точка.

Основни типове задачи

Зад. 20: Дадена е функцията $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията, за която допирателната, минаваща през тази точка, е успоредна на оста Ox .

Решение: Намираме първата производна: $y' = 6x^2 - 18x + 12$. По условие търсим допирателната успоредна на оста Ox , затова $k = 0$ и от (13) записваме $6x^2 - 18x + 12 = 0 : 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$. Тогава $y(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 1 = 6$ и $y(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 5$. Следователно върху графиката на дадената функция има две точки с координати $(1; 6)$ и $(2; 5)$, за които допирателната е успоредна на Ox .

Зад. 21: Дадена е функцията $y = x^2 - 2x + 0,25$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията, за която допирателната, минаваща през тази точка, сключва с оста Ox ъгъл 225° .

Решение: Намираме първата производна: $y' = 2x - 2$. Намираме коефициента $k = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$. От геометричния смисъл на производна (13) следва, че: $2x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 0,5; y(0,5) = -0,5$. Търсената точка е с координати $(0,5; -0,5)$.

Зад. 22: Намерете производната на функцията $f(x) = 1 - |2x + 1|$.

Решение: Записваме функцията във вида $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 1 = 2 + 2x, & \text{при } x < -\frac{1}{2} \\ 1 - 2x - 1 = -2x, & \text{при } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Тогава $f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } x < -\frac{1}{2} \\ -2, & \text{при } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Бележка:

Функцията $f(x)$ няма производна при $x = -\frac{1}{2}$, защото лявата и дясната граница

са $\lim_{\Delta x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{2(x+\Delta x) - 2x - 2 + 2}{\Delta x} = 2$; $\lim_{\Delta x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{-2(x+\Delta x) - 2x}{\Delta x} = -2$, т.е. те

не съвпадат и затова границата $y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не съществува.

Таблица №1

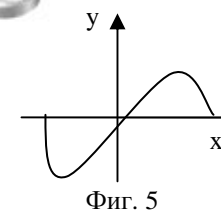
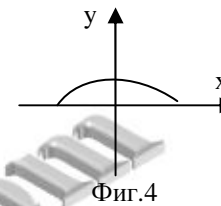
Формули за диференциране		Правила за диференциране	
Функция	Производна	Функция	Производна
$y=C$ ($C = \text{const}$)	$y' = 0$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = C \cdot u$	$y' = C \cdot u'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = x^k$	$y' = k \cdot x^{k-1}$	$y = u^k$	$y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
$y = \text{tg } x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
		$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
$y = \text{cotg } x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \text{tg } u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
		$y = \text{cotg } u$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

VI. Четност:

Една функция е четна за всяко $x \in \mathbb{D}, \mathbb{M.}$, ако графиката и е симетрична на ординатната ос y (фиг. 4), т.е. изпълнено е равенството $f(x)=f(-x)$. **Например:** всеки квадратен тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ е четна функция, ако $b = 0$; Функцията $f(x) = x^{2n}$ е винаги четна; $y = |x|$ е винаги четна и т.н. От тригонометричните функции само функцията $\cos x$ е четна (виж уроци “Тригонометрични функции” Фиг. 11).

VII. Нечетност:

Функцията $y = f(x)$ е нечетна за всяко $x \in \mathbb{D}, \mathbb{M.}$, ако графиката и е централно симетрична фигура спрямо началото на координатната система (фиг. 5), т.е. изпълнено е равенството $f(-x)=-f(x)$. **Например:** Функцията $y = x^{2n+1}$ е винаги нечетна (и въобще всяка функция която съдържа само нечетни степени на аргумента, е нечетна); Всички тригонометричните функции (без $\cos x$) (виж уроци “Тригонометрични функции” Фиг. 9, Фиг. 14, Фиг. 15).



Бележка:

Някои функции могат да са нито четни нито нечетни. Например: $y=x+1$; $y=2^x$ и т.н

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи

Зад. 23: Определете функцията $f(x) = \frac{x^6 - 2}{x^5 - 3x} + \sin^3 x$ дали е четна или нечетна.

Решение:

$$f(-x) = \frac{(-x)^6 - 2}{(-x)^5 - 3(-x)} + (\sin(-x))^3 = \frac{x^6 - 2}{-x^5 + 3x} + (-\sin x)^3 = -\left(\frac{x^6 - 2}{x^5 - 3x} + \sin^3 x\right) = -f(x), \text{ т.е.}$$

дадената функция е нечетна.

Зад. 24: Да се намерят стойностите на параметъра a , при които функцията $f(x)$

$= (3a + 1)x + 2a + 8$ е нечетна.

Решение: Дадената функция е нечетна когато е изпълнено $f(x) = -f(-x)$, т.е.
 $(3a + 1)x + 2a + 8 = -[(3a + 1)(-x) + 2a + 8] \Leftrightarrow 3ax + x + 2a + 8 = 3ax + x - 2a - 8 \Leftrightarrow 4a = -16 \Leftrightarrow a = -4$. Търсената стойност на параметъра е $a = -4$.

VIII. Периодичност:

Функцията $f(x)$ се нарича периодична, ако съществува число a такова, че за всяко $x \in \text{ДМ}$ е изпълнено $x - a \in \text{ДМ}$ и $x + a \in \text{ДМ}$, и освен това стойността на функцията не се променя, т.е. $f(x-a) = f(x+a) = f(x)$. Най-малкото такова положително число (ако съществува) се нарича елементарен период на функцията. **Например:** Функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са периодични с елементарен период 2π , а функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$ са периодични с елементарен период π . Функцията $f(x) = \operatorname{const}$ е периодична, защото всяко положително число е период на тази функция.

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас“.