Функции. Граници и производна на функция.

I. Функции

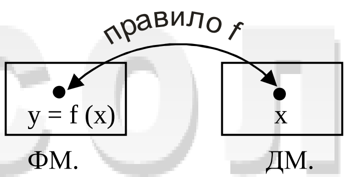
1. Определение

Ако една величина y зависи от изменението на друга величина x, то такава зависимост се нарича функционална зависимост.

Определение:

Правилото f, посредством което на всяка стойност на x се съпоставя точно една стойност на y, се нарича функция и обикновено се отбелязва: y = f (x).

Величината x наричаме аргумент, а величината y – функция. Стойностите, които може да заема аргумента, се наричат дефиниционно множество ДМ. или дефиниционна област на функцията, а множеството от стойности, които може да заема y, се нарича функционално множество ФМ. (Фиг. 1).



Фиг.1

За да бъде определена една функция, трябва да са дадени:

- ♦ Дефиниционното ѝ множество ДМ.
- ♦ Правилото f, което съпоставя на всяко x ∈ ДМ. точно едно определено y ∈ ФМ.

2. Начини за задаване на функция:

- ♦ Таблично – Задава се чрез стойностите на наредената двойка (x, y), където y = f (x). Таблицата обикновено се попълва опитно или чрез наблюдение, т.е. в даденото правило задаваме стойности на аргумента x и получаваме стойностите на функцията f (x).

x	– 1	0	1
y	– 4	– 1	2

- ♦ Аналитично – Когато правилото f е зададено чрез формула. Например:

y = f(x) = 2x^2 – 1; $y = f(x) = \begin{cases} 3 - x & за\ x \in (-\infty; 1) \\ 3 & за\ x = 1 \\ 3x - 1 & за\ x \in (1; +\infty) \end{cases}$.

Ако нищо не е казано да дефиниционната област ДМ. на функцията y = f(x), се смята, че тя се състои от всички стойности на аргумента x, за които могат да се извършат действия посочени във формулата.

- ♦ Словесно – Когато правилото f, което съпоставя на всяко точно определено , е зададено описателно. Например: На всяко x съпоставяме най-голямото ненадминаващо го цяло число, т.е. при x = 1,4 имаме y = 1, при x = – 1,4 имаме y = – 2.
- ♦ Графично – Графика на функцията y = f(x) се нарича множеството от всички точки с координати (x, y=f(x)), където x ∈ ДМ., определени в правоъгълна координатна система.

Всяка функция има графика.

Една функция y = f(x), където x ∈ ДМ., се нарича константа, ако за всяка стойност на x функцията приема една и съща стойност и се записва f(x) = const. В зависимост от дефиниционното множество графиката на константната функция f(x) = const е точка, права или отсечка.

3. Сложна функция

Нека да е дадена функцията y = f(u), където u = f(x), тогава функцията y = f(f(x)), се нарича сложна (съставна) или функция от функция. Например: $y = x + 2(x^2)^2$; $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи

Зад. 1: Дадена е функцията $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$. Намерете

$$f(-3);\ f\left(-2^{\frac{1}{2}}\right);\ \frac{1}{[f(x)]^2} - 3;\ \frac{f(-x)}{f(x-2)}$$

<u>Решение:</u> $f(-3) = \sqrt{4(-3)^2 + 1} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$.

- $f\left(-2^{\frac{1}{2}}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{4\left(-\sqrt{2}\right)^2+1}=\sqrt{4.2+1}=\sqrt{8+1}=3$.
- $\frac{1}{[f(x)]^2}-3=\frac{1}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}-3=\frac{1}{4x^2+1}-3=\frac{1-12x^2-3}{4x^2+1}=-\frac{12x^2-2}{4x^2+1}$.
- $\frac{f(-x)}{f(x-2)}=\frac{\sqrt{4(-x)^2+1}}{\sqrt{4(x-2)^2+1}}=\sqrt{\frac{4x^2+1}{4\left(x^2-4x+4\right)+1}}=\sqrt{\frac{4x^2+1}{4x^2-16x+17}}$.

Зад. 2: Да се реши неравенството $f(g(x)) \leqslant 1$, където $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = x+1$

<u>Решение:</u> От лявата страна на неравенството имаме сложна функция.

- $f(g(x)) = 2^{g(x)} - 1 = 2^{x+1} - 1$.
- $2^{x+1} - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow 2^{x+1} \leqslant 2^1 \Leftrightarrow x + 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

Зад. 3: Да се намерят стойностите на параметъра a, при които параболите на функциите $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ имат единствена обща точка.

<u>Решение:</u> За да имат параболите единствена обща точка, то уравнението $f(x) = g(x)$ трябва да има едно решение, т.е. $x^2 - 1 = 3x^2 - 2ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax + 1= 0$. Това уравнение има едно решение, когато $D = 0$, т.е. $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \pm 2$. Търсените стойности са $a_{1/2} = \pm 2$.

II. Граници *на функции*

Теореми:

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат граница при $x \to a$, и тя е $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

Теорема I: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$; (1)

Теорема II: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=A.B$; (2)

Следствие 1: $\lim\limits_{x\to a}\left[k.f(x)\right]=k.A$, където k е константа; (3)

Следствие 2: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=A^n$, където n е цяло положително число; (4)

Теорема III: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$, където $B\neq 0$. (5)

Ако някое аритметично действие няма стойност, то резултатът наричаме *неопределеност*. При граници на функции имаме няколко вида неопределеност:

- Неопределеност от вида $\frac{0}{0}$: Тя се получава от (5), ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
- Неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$: Тя се получава от (5), ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$
- Неопределеност от вида $\infty - \infty$: Тя се получава от (1), ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$, но $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$ може, както да съществува, така и да не съществува.
- Неопределеност от вида $0.\infty$: Тя се получава от (2), ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

Някои основни граници:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$, *ако* $x>0$ (6)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$, *ако* $x<0$ (7)

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0$ (8)

Следват избрани задачи

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

ОТ

Основни типове задачи

При решаване на задачи с граници, първо прилагаме непосредствено теоремите за граници на функции (от (1) до (5)). Ако получим число, то това число е търсената граница. Ако получим неопределеност, то решението е в зависимост от вида на неопределеността:

- Неопределеност от вида $\frac{0}{0}$ – За да премахнем тази неопределеност, числителят и знаменателят се преобразуват по следните начини: като се разложат на множители (при квадратен тричлен); като се изнесе общ множител пред скоби, за да се съкрати; умножаваме числителя и знаменателя със спрегнатите им изрази (един израз е спрегнат, когато при умножаването му с дадения се получава рационален израз.

Бележки:

1) Ако има корен само в числителя (или знаменателя), умножаваме само с него.
2) Ако числителят и знаменателят изглежда като формулите $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$ и т.н., за образуването на спрегнатите му се използва втората част от тези формули. ***Например:*** Спрегнатият на $a^3 - b^3$ е $(a^2 + ab + b^2)$.

Зад. 4: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{9x^2 + 12x - 5}{3x - 1}$

<u>Решение:</u> Ако непосредствено приложим теоремите за граница на функция, ще получим неопределената форма $\frac{0}{0}$. Затова разлагаме числителя на множители:
$9x^2 + 12x - 5 = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (3x+5)(3x-1)$ и преобразуваме задачата по следния начин:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{9x^2 + 12x - 5}{3x - 1} = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{(3x+5)(3x-1)}{3x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{3}} (3x+5) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x + 5 = 3.\frac{1}{3} + 5 = 6$$

Зад. 5: $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

<u>Решение:</u> Имаме неопределената форма $\frac{0}{0}$. Затова умножаваме числителя и знаменателя със спрегнатия израз на числителя и преобразуваме:
$\lim\limits_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$. Прилагаме (4) и получаваме: $\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 5} x - 1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}$

- Неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ – За да премахнем тази неопределеност разделяме числителя и знаменателя с най-високата степен на неизвестното (или изнасяме неизвестното с най-висока степен) и използваме (8).

Зад. 8: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x}}$

<u>Решение:</u>

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} . \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x} . \frac{2-0}{1+1} = -1.$$

Бележка:

При решаването на тази задача използвахме, че $|x| = -x$, когато $x \to -\infty$.

- Неопределеност от вида $\infty - \infty$ – Тази неопределеност се премахва, като я преобразува в неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Това става, като умножим и разделим със спрегнатия израз.

Зад. 9: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

<u>Решение:</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}.\frac{2}{1+1}=0.1=0$$

- Неопределеност от вида $0.\infty$ – Тази неопределеност се премахва, като се преобразува в неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Това става, като умножим и разделим със спрегнатия израз.

Освен граници от числови функции съществуват и граници от тригонометрични функции. Преобразуваме функцията така, че да се сведе до търсене на основна граница (от (9) до (11)).

Някои основни граници:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to0}\cos x=1 \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{tgx}{x}=1 \qquad (11)$$

Преобразуването на тригонометричната функция до основните граници се извършва по следните начини:

- Умножаваме числителя и знаменателя с подходящо число:

Зад. 10: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x}$

Решение: За да използваме основната граница (9), умножаваме числителя и знаменателя с 6 и получаваме: $\lim\limits_{x\to0}\frac{6.\sin 6x}{6x}=6\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{6x}=6.1=6$.

- Прилагаме формулите за преобразуване на тригонометрични функции:

Зад. 12: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{x.tg2x}$

Решение: Използваме Тригонометричните формули (17) и (66):

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to0}\frac{25.\sin^2\frac{5x}{2}.\cos 2x}{4.\frac{25x^2}{4}.\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{25}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2.\frac{\lim\limits_{x\to0}\cos 2x}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{25}{4}.1^2.\frac{1}{1}=\frac{25}{4}.$$

Зад. 13: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{tgx-tg\alpha}{x-\alpha}$, където α е число.

Решение: Използваме подходящи Тригонометричните формули:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x\cos\alpha-\sin\alpha\cos x}{(x-\alpha)(\cos x\cos\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha.\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x}=$$

$$=1.\frac{1}{\cos\alpha.\cos\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Понеже косинусът е в знаменател, за числото α получаваме $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

III. Лява и дясна граница.

Нека една функция y=f(x) да няма граница в дадена точка от ДМ (например точката на прекъсване). Нека тази точка да означим с x_0. Методът на границите може да се използва за изучаване на функцията в околност на тази точка. Ако разгледаме функцията y=f(x) само за стойности от ДМ, които са по-малки от x_0, то получаваме нова функция y=F(x). Границата на функцията y=F(x) при $x\to x_0$ (ако съществува) се нарича лява граница на функцията y=f(x) при $x\to x_0$ и се означава с $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<0}}f(x)$. Ако изследваме функцията y = f(x) само за стойности от Д.М., които са по-големи от x_0, то получената границата на функцията (ако съществува) се нарича дясна граница на функцията y=f(x) при $x\to x_0$ и се означава с $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)$.

Ако дясната и лявата граница на функция не съвпадат (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$), то f(x) няма истинска граница. Ако лявата и дясната граница на функция съвпадат (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$), (12)
то f(x) има истинска граница.

Бележка:

Израза (12) ни дава друг начин за намиране на граница на функция, т.е. ако лявата и дясната граница около дадена точка, принадлежаща на ДМ, съвпадат, то функцията има граница в тази точка.

Основни типове задачи

Зад. 14: Да се намери лявата и дясна граница на функцията $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ при $x \to 0$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x\to 0$.

Зад. 15: Да се намери лявата и дясна граница в точките на прекъсване на функциите:

$$а)\ y=\begin{cases} x^2-x & при \quad x\le 1\\ 2-x^2 & при \quad 1<x<2\\ 2-x & при \quad x\ge 2\end{cases} \qquad б)\ y=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & при \quad x<0\\ 1 & при \quad x=0\\ \dfrac{\sin x}{x} & при \quad x>0\end{cases}.$$

Решение: а) Прекъсването е в точките 1 и 2. Затова разглеждаме следните случаи:

А) При $x=1$ имаме

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2-x)=(1-0)^2-(1-0)=0;\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(2-x^2)=2-(1+0)^2=1$$

т.е.лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x\to 1$.

В) При $x=2$ имаме

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(2-x^2)=2-(2-0)^2=-2;\quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(2-x)=2-(2+0)=0$$

т.е.лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x\to 2$.

$$б)\ \lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0-0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0-0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ т.е.лявата и дясна граница не съвпадат, следователно дадената функция няма граница при $x\to 0$.

IV. Непрекъснатост на функция.

Определение:

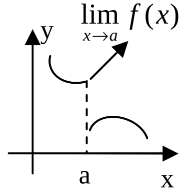
Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точка a, ако:

- Точката a принадлежи на Д.М. на $f(x)$;
- Функцията $f(x)$ има граница при $x\to a$ и тази граница е равна на стойността на функцията в тази точка т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ако не е изпълнено едно от горните условия, казваме, че функцията $f(x)$ е прекъсната в точката a (Фиг.2).

Ако функцията $f(x)$ не е дефинирана в точката a, но има граница в тази точка (т.е. съществува $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$), то Д.М. на функцията може да се разшири като положим $f(a)=A$. Така функцията $f(x)$ става непрекъсната в точката a. В такъв случай казваме, че точката a е точка на отстранимо прекъсване.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не съществува



Фиг.2

Например: Функцията $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ в точката $x=1$ има отстранимо прекъсване, тъй като при $x=1$ функцията $f(x)$ не съществува (защото Д.М.: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$), но границата $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=$ $=1+1=2$, е крайно число. Функцията може да се додефинира така, че да бъде непрекъсната и при $x=1$, по следния начин

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & при\ x\neq 1\\ 2 & при\ x=1\end{cases}$$. Така дефинирана функцията f(x) е непрекъсната за $\forall x$.

Основни типове задачи

Зад. 16: Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$. Да се дефинира така, че в точката x=0 да е непрекъсната.

Решение: Д.М.: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Ако пресметнем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, и ако тази граница е конкретно число, тогава за f(0) ще приемем тази граница. Имаме неопределеност $\frac{0}{0}$ и затова границата намираме като умножим и разделим със спрегнатите на числителя и знаменателя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{-x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=-1\Rightarrow f(0)=-1$$

За да бъде функцията непрекъсната и в точката 0, трябва да я запишем

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} & при\quad x\neq 0\\ -1 & при\quad x=0\end{cases}$$. Така получената функция е непрекъсната за $x\in[-1; 1]$.

Зад. 18: Намерете параметъра a така, че функцията f(x) да е непрекъсната за всяко x от дефиниционното си множество, ако

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-11}{\sqrt{x-2}-3} & при\quad x\in[2,11)\cup(11,+\infty)\\ a & при\quad x=11\end{cases}.$$

Решение: $\sqrt{x-2}-3\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\neq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix}\left(\sqrt{x-2}\right)^2\neq 3^2\\ x-2\geq 0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2\neq 9\\ x\geq 2\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x\neq 11\\ x\geq 2\end{vmatrix}$

$Д.М.: x\in[2,11)\cup(11,+\infty)$

За да определим параметъра a така, че функцията f(x) да е непрекъсната в ДМ, трябва границата и в тази точка да е равна на стойността на функцията, т.е.

$$a=f(11)=\lim_{x\to 11}f(x)=\lim_{x\to 11}\frac{x-11}{\sqrt{x-2}-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+3}=\lim_{x\to 11}\frac{(x-11)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{x-2-3^2}=$$

$$=\lim_{x\to 11}\frac{(x-11)\left(\sqrt{x-2}+3\right)}{x-11}=\lim_{x\to 11}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=\sqrt{11-2}+3=\sqrt{9}+3=6$$

т.е. при a=6 функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-11}{\sqrt{x-2}-3} & при\quad x\in[2,11)\cup(11,+\infty)\\ a & при\quad x=11\end{cases}$ е непрекъсната за всяко x от Д.М.

Непрекъснатостта на дадена функция ни позволява да определяме дали тя има корени в даден интервал. Ако в краищата на интервала [a, b] непрекъснатата функция f(x) приема стойности с различни знаци, то уравнението f(x) = 0 има поне един корен в този интервал.

Теорема:

(за съществуване на корен): Ако функция f(x) е непрекъсната в интервала [a; b] и f(a).f(b) < 0, то съществува $x_0\in(a, b)$ такова, че $f(x_0) = 0$, т.е. уравнението f(x) = 0 има поне един корен в дадения интервал.

Зад. 19: Докажете, че уравнението $x^4 - x^2 - 5x - 3 = 0$ има корен в интервала [2, 3].

Решение: Нека да положим $f(x) = x^4 - x^2 - 5x - 3$. Д.М. $\forall x$.

$$\left.\begin{array}{ll}2\in Д.М.; & \lim\limits_{x\to 2}\left(x^4-x^2-5x-3\right)=2^4-2^2-10-3=-1;\quad f(2)=-1\\ 3\in Д.М.; & \lim\limits_{x\to 3}\left(x^4-x^2-5x-3\right)=3^4-3^2-15-3=54;\quad f(3)=54\end{array}\right\}\Rightarrow$$ функцията f(x) е непрекъсната в интервала [2, 3]. Но f(2).f(3) < 0, следователно даденото уравнение има поне един корен в искания интервал.

Теорема:

Ако една функция f(x) е дефинирана в интервала [a; b] и има производна (диференцируема в т. x_0), то казваме, че функцията е непрекъсната в точка x_0.

Обратното не е вярно, т.е. ако функцията е непрекъсната в точка x_0, то тя не винаги е диференцируема (следователно Функцията да е непрекъсната в точката x_0 е необходимото, но недостатъчно условие за диференцируемост).

V. Диференцируемост на функция.

1. Определение

Една функция е диференцируема в дадена точка, ако има първа производна в тази точка.

Първата производна на функцията y в дадена точка (виж Фиг. 2) се дефинира, като границата (ако съществува) на отношението $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (нарастването на функцията и нарастването на аргумента), когато нарастването на аргумента клони към нула, т.е. $f'(x) = y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. За намирането на първа производна се използва <u>таблица №1</u>.

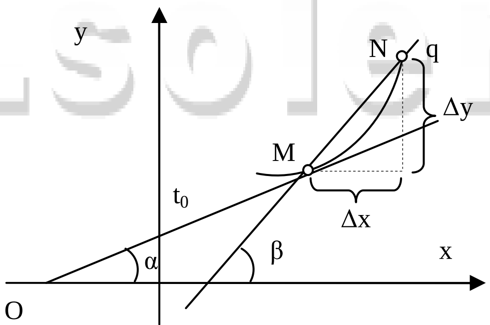
2. Механичен смисъл на производната

Теореми:

Теорема 1: Скоростта на едно тяло, движещо се по път s = f(t) в даден момент t_0, е равна на първата производна на пътя, т.е. $v = s'(t_0)$.

Теорема 2: Ускорението <u>a</u> на тяло, движещо се със скорост v = f(t), е равна на първата производна от скоростта, т.е. $a = v'(t_0) = s''(t_0)$.

3. Геометричен смисъл на производната



Фиг. 3

Нека графиката на функцията y=f(x) е кривата MN (Фиг. 3). Нека през двете точки MN да построим права q, която сключва с абсцисната ос ъгъл β. Когато точката N се приближава към точката M, права q се стреми към една гранична права t_0. Тази гранична права се нарича допирателна към графиката на функцията f(x) в дадената точка (на Фиг. 3 тази точка е M). Нека ъгълът, който сключва допирателната с оста Ox, означим с α. Производната на функцията f(x) е границата $\lim\limits_{\beta \to \alpha} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x)$. Тангенсът на ъгъла, когато допирателната към кривата в дадена точка сключва с абсцисната ос, се нарича ъглов коефициент на допирателната в тази точка и се означава с k = tg α. За ъгловия коефициент имаме следната теорема $k = tg\alpha = \lim\limits_{\beta \to \alpha} tg\beta = \lim\limits_{\beta \to \alpha} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ (13)

Изразът (13) ни дава геометричния смисъл на понятието производна, т.е. стойността на първата производна на една функция в дадена точка е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в същата точка.

Основни типове задачи

Зад. 20: Дадена е функцията $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията, за която допирателната, минаваща през тази точка, е успоредна на оста Ox.

<u>Решение:</u> Намираме първата производна: $y' = 6x^2 - 18x + 12$. По условие търсим допирателната успоредна на оста 0x, затова k = 0 и от (13) записваме $6x^2 - 18x + 12 = 0 | :6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$. Тогава $y(1) = 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 + 1 = 6$ и $y(2) = 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 + 1 = 5$. Следователно върху графиката на дадената функция има две точки с координати (1; 6) и (2; 5), за които допирателната е успоредна на Ox.

Зад. 21: Дадена е функцията $y = x^2 - 2x + 0{,}25$. Намерете координатите на точката от графиката на функцията, за която допирателната, минаваща през тази точка, сключва с оста Ox ъгъл 225^0 .

<u>Решение:</u> Намираме първата производна: $y' = 2x - 2$. Намираме коефициента $k = tg\frac{3\pi}{4} = -1$. От геометричния смисъл на производна (13) следва, че: $2x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 0{,}5$; $y(0{,}5) = -0{,}5$. Търсената точка е с координати (0,5; –0,5).

Зад. 22: Намерете производната на функцията f (x) = 1 – |2x + 1|.

<u>Решение:</u> Записваме функцията във вида $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 1 = 2 + 2x, \ \textit{при} \ x < -\frac{1}{2} \\ 1 - 2x - 1 = -2x, \ \textit{при} \ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Тогава $f`(x)=\begin{cases} 2,\ при\ x<-\dfrac{1}{2}\\ -2,\ при\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Бележка:

Функцията f (x) няма производна при $x=-\frac{1}{2}$, защото лявата и дясната граница са $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to -\frac{1}{2}\\ \Delta x<-\frac{1}{2}}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to -\frac{1}{2}\\ \Delta x<-\frac{1}{2}}}\frac{2(x+\Delta x)-2x-2+2}{\Delta x}=2$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to -\frac{1}{2}\\ \Delta x>-\frac{1}{2}}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to -\frac{1}{2}\\ \Delta x>-\frac{1}{2}}}\frac{-2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=-2$, т.е. те не съвпадат и затова границата $y`(x)=\lim\limits_{\Delta x\to -\frac{1}{2}}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не съществува.

Таблица №1

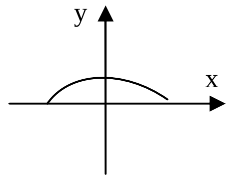
Формули за диференциране		Правила за диференциране	
Функция	Производна	Функция	Производна
y=C (C = const)	$y' = 0$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
y = x	$y' = 1$	y = C.u	$y' = C.u'$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	y = u.v	$y' = u'v + uv'$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$y = x^k$	$y' = k.x^{k-1}$	$y = u^k$	$y' = k.u^{k-1}.u'$
y = sin x	y' = cos x	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
y = cos x	y' = – sin x	$y=\frac{1}{u}$	$y'=-\frac{u'}{u^2}$
y = tg x	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$	y = sin u y = cos u	y' = cos u.u′ y' = – sin u.u′
y = cotg x	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	y = tg u y = cotg u	$y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$ $y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$

VI. Четност:

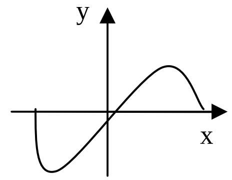
Една функция е четна за всяко x∈Д.М., ако графиката и е симетрична на ординатната ос y (фиг. 4), т.е. изпълнено е равенството f(x)=f(–x). **Например:** всеки квадратен тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ е четна функция, ако b = 0; Функцията $f(x) = x^{2n}$ е винаги четна; y = |x| е винаги четна и т.н. От тригонометричните функции само функцията cos x е четна (виж уроци “Тригонометрични функции” Фиг. 11).

VII. Нечетност:

Функцията y = f(x) е нечетна за всяко x ∈ Д.М., ако графиката и е централно симетрична фигура спрямо началото на координатната система (фиг. 5), т.е. изпълнено е равенството f(–x)=–f(x). **Например:** Функцията $y = x^{2n+1}$ е винаги нечетна (и въобще всяка функция която съдържа само нечетни степени на аргумента, е нечетна); Всички тригонометричните функции (без cos x) (виж уроци “Тригонометрични функции” Фиг. 9, Фиг. 14, Фиг. 15).



Фиг.4



Фиг. 5

Бележка:

Някои функции могат да са нито четни нито нечетни.
Например: y=x+1; $y=2^x$ и т.н

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи

Зад. 23: Определете функцията $f(x)=\frac{x^6-2}{x^5-3x}+\sin^3 x$ дали е четна или нечетна.

Решение:

$f(-x)=\frac{(-x)^6-2}{(-x)^5-3(-x)}+(\sin(-x))^3=\frac{x^6-2}{-x^5+3x}+(-\sin x)^3=-\left(\frac{x^6-2}{x^5-3x}+\sin^3 x\right)=-f(x)$, т.е. дадената функция е нечетна.

Зад. 24: Да се намерят стойностите на параметъра a, при които функцията f(x)

$= (3a + 1)x + 2a + 8$ е нечетна.

Решение:. Дадената функция е нечетна когато е изпълнено $f(x) = -f(-x)$, т.е. $(3a + 1)x + 2a + 8 = -[(3a + 1)(-x) + 2a + 8] \Leftrightarrow 3ax + x + 2a + 8 = 3ax + x - 2a - 8 \Leftrightarrow 4a = -16 \Leftrightarrow a = -4$. Търсената стойност на параметъра е $a = -4$.

VIII. Периодичност:

Функцията $f(x)$ се нарича периодична, ако съществува число a такова, че за всяко $x \in$ ДМ е изпълнено $x - a \in$ ДМ и $x + a \in$ ДМ, и освен това стойността на функцията не се променя, т.е. $f(x-a) = f(x+a) = f(x)$. Най-малкото такова положително число (ако съществува) се нарича елементарен период на функцията. **Например:** Функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са периодични с елементарен период 2π, а функциите $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{cotg}\, x$ са периодични с елементарен период π. Функцията $f(x) = \mathrm{const}$ е периодична, защото всяко положително число е период на тази функция.

Задачи за упражнение: