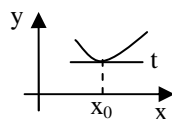
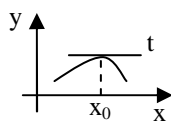


## Приложение на производните

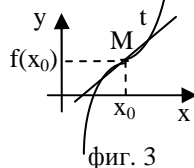
### I. Изпъкналост и вдлъбнатост



фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3

#### Определения:

Нека функцията  $f(x)$  е непрекъсната около точка  $x_0$ . В тази точка от графиката да построим допирателна  $t$ .

*Изпъкнала* (гледана отдолу) – Функцията  $f(x)$  е изпъкнала в точка  $x_0$ , ако точките от графиката около  $x_0$  са над допирателната (Фиг. 1).

*Вдлъбната* (гледана отдолу) – Функцията  $f(x)$  е вдлъбната в точка  $x_0$ , ако точките от графиката около  $x_0$  са под допирателната (Фиг. 2).

*Инфлексна точка* – Ако функцията  $f(x)$  е изпъкнала от едната страна на  $x_0$ , а от другата страна е вдлъбната, то точката  $M(x_0, f(x_0))$  се нарича инфлексна точка (Фиг. 3).

#### Теорема:

*Условия за изпъкналост и вдлъбнатост* – Ако функцията  $f(x)$  има втора производна навсякъде в интервала  $[a, b]$  и

- ◆  $f''(x) > 0$  за  $\forall x \in [a, b]$ , то  $f(x)$  е изпъкнала в интервала  $[a, b]$ ;
- ◆  $f''(x) < 0$  за  $\forall x \in [a, b]$ , то  $f(x)$  е вдлъбната в интервала  $[a, b]$ .

*Условия за инфлексна точка* – Ако функцията  $f(x)$  е два пъти диференцирана в интервала  $[a, b]$  и  $f''(x) = 0$ , то точката  $M(x_0, f(x_0))$  е инфлексна точка (Фиг. 3).

Зад. 1: Да се изследват относно изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексна точка, функциите:

а)  $f(x) = x^3 - 3x$ ;

б)  $f(x) = x^4 - 2x$

Решение: а) Намираме втората производна:  $f' = 3x^2 - 3$ ;  $f'' = 6x$ . При  $x < 0$  фун-

кцията е вдлъбната (защото  $f''(x) < 0$ ). При  $x > 0$  функцията е изпъкнала (защото  $f''(x) > 0$ ). При  $x = 0$  функцията има инфлексна точка  $(0, 0)$ , защото в тази точка функцията променя знака си.

б) Намираме втората производна:  $f' = 4x^3 - 2$ ;  $f'' = 12x^2$ . За всяко  $x \neq 0$  имаме  $f''(x) > 0$ . Следователно дадената функция е само изпъкнала.

#### Бележка:

При  $x = 0$  имаме  $f''(x) = 0$ , но точката  $(0, 0)$  не е инфлексна защото  $f''(x)$  не променя знака си.

### II. Монотонност (растене и намаляване) на функция

#### Определения:

*Растяща* – Една функция  $f(x)$  е растяща в интервала  $[a, b]$ , когато за всеки две стойности  $x_1 \in \text{Д.М.}$  и  $x_2 \in \text{Д.М.}$  за които  $x_1 \geq x_2$  и изпълнено  $f(x_1) \geq f(x_2)$  (функцията е строго растяща, ако за  $x_1 > x_2$  и изпълнено  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

*Намаляваща* – Една функция  $f(x)$  е намаляваща в интервала  $[a, b]$ , когато за всеки две стойности  $x_1 \in \text{Д.М.}$  и  $x_2 \in \text{Д.М.}$  за които  $x_1 \geq x_2$  и изпълнено  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (функцията е строго намаляваща, ако за  $x_1 > x_2$  и изпълнено  $f(x_1) < f(x_2)$ ).

#### Правило за намиране на интервала на монотонност:

1. Нека функцията  $f(x)$  е непрекъсната в  $[a, b]$ . Намираме Д.М.;
2. Функцията  $f(x)$  е диференцируема в  $(a, b)$  т.е. Намираме първата и производна;
3. Определяме интервалите на монотонност: Ако за  $\forall x \in (a, b)$ :
  - ◆  $f'(x) > 0$ , то функцията  $f(x)$  е растяща в  $[a, b]$  т.е. решаваме  $f'(x) > 0$ ;
  - ◆  $f'(x) < 0$ , то функцията  $f(x)$  е намаляваща в  $[a, b]$  т.е. решаваме  $f'(x) < 0$ .

Растяща или намаляваща функция се нарича общо монотонна.

Ако за всяка точка от интервала  $[a, b]$  производната е равна на нула, то функцията ще бъде едновременно растяща и намаляваща т.е. тя ще е константа. **Например:**  $f(x) = ax + b$ , където  $a$  и  $b$  са константи. Когато  $a > 0$ , функцията  $f(x)$  е строго растяща. Когато  $a < 0$ , функцията  $f(x)$  е строго намаляваща. Когато  $a = 0$ , функцията  $f(x)$  не е нито намаляваща, нито растяща (защото в този случай имаме  $f(x) = \text{const}$ ).

**Бележка:**

Свойствата: монотонност, ограниченост, непрекъснатост в интервал, четност и нечетност, периодичност, се отнасят за всички точки от дадено множество. Затова те се наричат *глобални свойства*.

Свойствата: граница, непрекъснатост в точка, диференцируемост, се отнасят за поведението на функцията в дадена точка. Тези свойства се наричат *локални свойства*.

Зад. 2: Да се намерят интервалите на растене и намаление на функциите:

а)  $f(x) = 2x - x^2$ ;      б)  $f(x) = 3x^3$       в)  $f(x) = \frac{1}{x}$

**Решение:** а) Д.М.:  $\forall x$ . Функцията  $f(x)$  е непрекъсната и диференцируема за  $\forall x \in \text{Д.М.}$ . Намираме първата производна:  $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$ . Решаваме  $f'(x) > 0 \Rightarrow 2(1 - x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ . Следователно функцията  $f(x)$  е растяща в интервала  $(-\infty; 1)$ . Решаваме  $f'(x) < 0 \Rightarrow 2(1 - x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$ . Следователно функцията  $f(x)$  е намаляваща в интервала  $(1; +\infty)$ .

б) Д.М.:  $\forall x$ . Функцията  $f(x)$  е непрекъсната и диференцируема за  $\forall x \in \text{Д.М.}$  и  $f'(x) = 9x^2$ . При  $x < 0$  имаме  $f'(x) > 0$ . Следователно  $f(x)$  е растяща в интервала  $(-\infty; 0]$ . При  $x > 0$  имаме също  $f'(x) > 0$ . Следователно функцията  $f(x)$  е растяща в интервала  $[0; +\infty)$ . Двата интервала имат обща точка и затова можем да кажем, че  $f(x)$  е растяща в интервала  $(-\infty; +\infty)$ .

в) Д.М.:  $\forall x \neq 0$ . Функцията  $f(x)$  е непрекъсната и диференцируема за  $\forall x \in \text{Д.М.}$  и  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . При  $x < 0$  имаме  $f'(x) < 0$ . Следователно  $f(x)$  е намаляваща в интервала  $(-\infty; 0)$ . При  $x > 0$  имаме също  $f'(x) < 0$ . Следователно функцията  $f(x)$  е намаляваща в интервала  $(0; +\infty)$ .

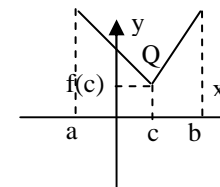
**Бележка:**

Не можем да направим извода (както при горния пример), че  $f(x)$  е намаляваща функция в целия интервал, защото ДМ е множество от два интервала.

### III. Рогова точка

**Определение:**

Точка от графиката, в която функцията има екстремум, но няма първа производна (или първата производна не съществува) се нарича *рогова точка* (Точка Q от Фиг. 4)



Фиг. 4

В роговата точка се правят изследвания за екстремум.

**Например:** Функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в интервала  $[a, b]$  (Фиг. 4). Нека първата производна да е  $f'(x)$ , но тя да не съществува при  $x = c$ . Затова точката Q от графиката с координати Q  $(c, f(c))$  се нарича рогова точка.

Зад. 3: Да се намери първата производна на:

а)  $f(x) = |x|$ .      б)  $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

**Решение:** а) ДМ:  $\forall x$ . Дадената функция изглежда по следния начин

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{при } x < 0 \\ x, & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \text{ Тогава } f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases} \text{ като } f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ не съществува,}$$

защото  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ , т.е. лявата и дясната граница при  $x \rightarrow 0$

не съвпадат. Казваме, че функцията  $f(x) = |x|$ , при  $x = 0$  има лява производна  $-1$  и дясна производна  $1$ , но производна няма. Тогава точката с координати  $(0; 0)$  се нарича рогова точка (на Фиг. 4 роговата точката Q  $(0; 0)$  е в центъра на координатната система). В роговата точка графиката има “лява” допирателната с ъглов коефициент  $-1$  и “дясна” допирателна с ъглов коефициент  $1$ , но допирателна няма.

б) ДМ:  $\forall x$ .  $f'(x) = \left[ (x-2)^{\frac{2}{3}} \right]' = \frac{2}{3} (x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{(x-2)}}$  т.е. можем да намерим пър-

вата производна, но тя не е дефинирана при  $x = 2$ . Следователно точката от графиката с абсциса  $x = 2$  е рогова точка.

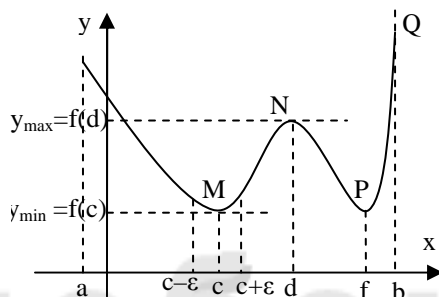
### IV. Критични точки

Точките от ДМ на функция, при които първата производна не съществува (рогова точка) или първата производна е равна на нула (точките с локален екстремум) се наричат критични точки.

## V. Локален екстремум

Нека да имаме функцията  $f(x)$ , която е дефинирана в интервала  $[a; b]$ , и нека уравнението  $f'(x) = 0$  да има корени  $x_1 = c \in [a; b]$  и  $x_2 = d \in [a; b]$ . От графиката на Фиг. 5 се вижда, че точките  $c$ ,  $d$  и  $f$  разделят графиката на четири интервала:

- ◆ За  $x \in [a; c)$  функцията  $y = f(x)$  намалява;
- ◆ За  $x \in (c; d)$  функцията  $y = f(x)$  расте;
- ◆ За  $x \in (d; f)$  функцията  $y = f(x)$  намалява;
- ◆ За  $x \in (f; b]$  функцията  $y = f(x)$  расте;



фиг. 5

### Определения:

**Локален min:** Функцията  $f(x)$ , която е дефинирана в интервала  $[a; b]$ , има локален min в точката  $x_1 = c \in [a; b]$ , когато може да се намери достатъчно малка околност около т.  $c$  (например на Фиг. 5 околността  $(c-\epsilon; c+\epsilon)$ , където  $\epsilon > 0$ ), в която няма стойност на  $f(x)$  по-малка от  $f(c)$ , т.е. имаме  $f(x) \geq f(c)$ .

**Локален max:** Функцията  $f(x)$ , която е дефинирана в интервала  $[a; b]$ , има локален max в точката  $x_1 = d \in [a; b]$ , когато може да се намери достатъчно малка околност около т.  $d$  (например на Фиг. 5 околността  $(d-\epsilon; d+\epsilon)$ , където  $\epsilon > 0$ ), в която няма стойност на  $f(x)$  по-малка от  $f(d)$ , т.е. имаме  $f(x) \leq f(d)$ .

Общото название на локален max и min е локален (местен) екстремум. Ако функцията  $f(x)$  има локален min се записва  $f_{\min}$ , ако има локален max – записваме  $f_{\max}$ .

### Бележки:

- ◆ Една функция може да има повече от един локален екстремум (На Фиг. 5 имаме два локални min (в т. М и т. Р) и един локален max (в т. N). Някои функции (например  $y = \sin x$ ) имат безброй локални екстремуми;
- ◆ Една функция може да няма локален екстремум (Например:  $y = \lg x$ ;  $y = x$  и т.н.);
- ◆ Локалният екстремум не трябва да се смесва с най-малка и най-голяма стойност на функцията (Например от фиг. 5 най-голямата стойност на функцията е в т. Q, но там няма локален екстремум. Дори точката с локален min може да бъде по-високо от точката с локален max;
- ◆ В точките с локален екстремум производната е равна на нула, т.е. допирателната в съответните точки от графиката е успоредни на оста  $Ox$  (ъгловия коэффициент  $k = 0$ );
- ◆ Една функция може да няма производна в дадена точка, т.е. първата и производна да не е дефинирана в дадена точка, но да има локален екстремум в тази точка. Например: в роговата си точка функцията има локален екстремум, но няма производна.

Отчитайки определенията и теоремите за съществуването на локален екстремум, можем да запишем следните правила за намирането му:

**Правила:**

**I правило**

(достатъчно условие за съществуване на локален екстремум)

*Първа стъпка:* Намираме Д. М. и проверяваме за непрекъснатост в тази Д. М. (защото функцията трябва да бъде дефинирана и непрекъсната в даден интервал  $[a; b]$ , за да има екстремум). Намираме първата производна.

*Втора стъпка:* Определяме критичните точки:

- ◆ точките, в които функцията няма първа производна (знаем, че това са роговите точки);
- ◆ точките, в които първата производна се анулира, т.е. решаваме уравнението  $f'(x) = 0$ . Нека решенията му са  $x_1 = c$  и  $x_2 = d$  (фиг. 5). Така определяме точките, в които функцията евентуално може да има локален екстремум. Ако уравнението  $f'(x) = 0$  няма решение, то функцията няма екстремум, т.е.  $f(x)$  е само растяща (или намаляваща);

*Трета стъпка:* Ако съществува първата производна (т.е. нямаме рогова точка), намираме втората производна. Ако тя не може да се намери, продължаваме изследването по II правило;

*Четвърта стъпка:* Изследваме знака на втората производна в точките на екстремум:

- ◆ Ако  $f''(c) > 0$ , то в тази точка функцията има локален min. За да намерим стойността на функцията в точката на локалния min, заместваем съответния корен (например: c) във функцията, т.е. намираме  $y_{\min} = f(c)$ . На фиг. 5 точката с локален минимум е M(c; f(c));
- ◆ Ако  $f''(d) < 0$ , то в тази точка функцията има локален max. За да намерим стойността на функцията в точката на локалния max, заместваем съответния корен (например: d) във функцията, т.е. намираме  $y_{\max} = f(d)$ . На фиг. 5 точката с локален максимум е N(d; f(d));

- ◆ Ако  $f''(d) = 0$ , то в тази точка функцията има инфлексия, т.е. това е точка, в която функцията не променя знака си, а само преминава от вдлъбната в изпъкнала (или обратното)

**II правило**

(необходимо условие за съществуване на локален екстремум)

Първите две стъпки се повтарят от I Правило;

*Трета стъпка:* Изследваме знака на първата производна във всеки от интервалите, т.е. определяме в кои интервали функцията е растяща (решаваме неравенството  $f'(x) > 0$ ) или намаляваща (решаваме неравенството  $f'(x) < 0$ ). Точката, при която функцията от намаляваща преминава в растяща, имаме локален min, а от растяща в намаляваща – локален max.

Зад. 4: Намерете локалните екстремуми на функцията  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

*Решение:* Д.М.:  $\forall x$ . Намираме първата производна:  $f' = 3x^2 - 6x - 9$ . Определяме критичните точки, като приравним първата производна на нула:  $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$ .

*Първи начин:* Прилагаме третата стъпка на I правило: Намираме втората производна:  $f'' = 6x - 6$ . Проверяваме знака на втората производна в точките на екстремум:  $f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$ . Следователно функцията в тази точка има min. Намираме стойността на този локален минимум, като заместим във функцията, т.е.  $y_{\min} = f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 6 = -21$ ;  $f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0$ . Следователно функцията в тази точка има max. Намираме стойността на този локален максимум, като заместим във функцията, т.е.  $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 6 = 11$ .

*Втори начин:* За да определим вида на локалните екстремуми, изследваме знака на първата производна в критичните точки (трета стъпка II правило) т.е. решаваме неравенството  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 > 0$ . Резултатите нанасяме в таблицата:

	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	↘	↗	

От таблицата виждаме, че при  $x = -1$  имаме локален max, а при  $x = 3$  имаме локален min. Стойността на max и min намираме, като заместим във функцията:  $y_{\min} = f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 6 = -21$  и  $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 6 = 11$ .

Зад. 5: Намерете локалните екстремуми на функцията  $y = \frac{5x-3}{x+2}$

**Решение:** Д.М.:  $\forall x \neq -2$ . Намираме първата производна:  
 $f' = \frac{5(x+2) - (5x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x+3}{(x+2)^2} = \frac{13}{(x+2)^2}$ . Точката, в която първата производна

не съществува е  $-2$ , но тя не принадлежи на Д.М. Следователно  $x = -2$  не е критична точка. Уравнението  $f' = 0$  няма решение. Следователно дадената функция няма екстремум ( $f'(x) > 0$  за  $\forall x$  затова функцията е само растяща).

Зад. 6: Намерете локалните екстремуми на функцията  $y = |1 - x^2|$ .

**Решение:** Д.М.:  $\forall x$ . Използвайки свойствата на модула, дадената функция и нейната производна могат да се запишат по следния начин:

$$y = \begin{cases} -(1-x^2), & \text{при } x < -1 \\ 1-x^2, & \text{при } x \in [-1; 1] \\ -(1-x^2), & \text{при } x \geq 1 \end{cases}; \quad f' = \begin{cases} 2x, & \text{при } x < -1 \\ -2x, & \text{при } x \in (-1; 1) \\ 2x, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Критичните точки са:  $x = \pm 1$  (точките, в които първата производна не съществува, т.е. това са роговите точки) и  $x = 0$  (точката, при която първата производна е равна на нула и в трите интервала). В тези три точки изследваме функцията за локален екстремум, като определяме знака и в четирите интервала:

	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	$+$	$\parallel$
$f(x)$	$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

От таблицата се вижда, че при  $x = \pm 1$  функцията има min и той е  $f(-1) = f(1) = 0$ , а при  $x = 0$  – има максимум и той е  $f(0) = 1$ .

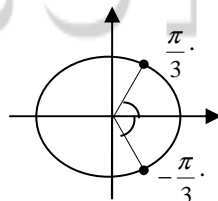
Зад. 7: Намерете локалните екстремуми на функцията

$$y = \frac{1}{2}x - \sin x \quad \text{при } x \in (0; 2\pi).$$

**Решение:** Д.М.:  $\forall x \in (0; 2\pi)$  и  $f' = \frac{1}{2} - \cos x$ . Уравнението

$f' = 0$  има решения  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  т.е.  $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$  са критичните точки при  $x \in (0; 2\pi)$ . Определяме вида на екстремума:  $f'' =$

$\sin x$ . Тогава:  $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ;  $y_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$  и



Фиг. 6

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0; \quad y_{\max} = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зад. 8: Ако  $x = \frac{\pi}{3}$ , да се определи при кои стойности на параметъра  $a$  функцията

$y = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  има екстремум и да се определи вида му.

**Решение:** За да има екстремум, дадената функция трябва първата и производна да е равна на нула в тази точка, т.е

$$f' = a \cos x + \frac{1}{3} \cdot 3 \cos 3x = a \cos x + \cos 3x; \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - 1 = 0 \Rightarrow a = 2. \quad \text{За}$$

да намерим какъв е екстремума, с така намерената стойност на параметъра заместяваме в първата производна  $f' = 2 \cos x + \cos 3x$  и изследваме втората производна:

$$f'' = -2 \sin x - 3 \sin 3x; \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sin \pi = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0. \quad \text{Следователно да}$$

дената функция при  $a = 2$  има max, като стойността на този максимум е

$$y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \sin \pi = \sqrt{3}.$$

## VI. Най-голяма и най-малка стойност

Най-голямата (НГС) и най-малка стойност (НМС) на функция в затворен интервал наричаме още абсолютен (глобален) екстремум. Нека при  $x = c \in [a, b]$  функцията получава най-малката си стойност, а при  $x = d \in [a, b]$  получава най-голямата си стойност. Това се записва:  $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(c)$  и  $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(d)$ . Очевидно е

тогава, че имаме неравенството  $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$  и стойностите, които може да заема функцията принадлежат на интервала  $[f(c); f(d)]$ .

Нека да имаме функцията  $y = f(x)$ , която е дефинирана и непрекъсната за всяко  $x \in [a; b]$ . В зависимост от вида на интервала са възможни следните случаи:

♦ Функцията няма локален екстремум в този интервал – Тя е или растяща, или намаляваща

○ Ако интервалът е отворен от двете страни, то функцията няма най-голяма и най-малка стойност;

○ Ако интервалът е затворен, намираме  $f(a)$  и  $f(b)$ . Ако  $f(a) < f(b)$ , то

$$\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b); \quad \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$$

- ◆ Функцията има един локален екстремум в този интервал:
    - Ако този екстремум е  $\max$ , то той е и най-голямата стойност, т.е.  $\max_{x \in [a; b]} f(x) = y_{\max}$ . Най-малката стойност се определя от интервала: Ако той е отворен, функцията няма НМС, ако той е затворен от двете страни намираме  $f(a)$  и  $f(b)$ . Ако  $f(a) < f(b)$ , то  $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$ ;
    - Ако този екстремум е  $\min$ , то той е и най-малката стойност, т.е.  $\min_{x \in [a; b]} f(x) = y_{\min}$ . Най-голямата стойност се определя от интервала: Ако той е отворен, функцията няма НГС, ако той е затворен от двете страни намираме  $f(a)$  и  $f(b)$ . Ако  $f(a) < f(b)$ , то  $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b)$ ;
  - ◆ Функцията има повече от един екстремум в този интервал:
    - Ако интервалът е отворен, то  $\max_{x \in (a, b)} f(x) = y_{\max}$ ;  $\min_{x \in (a, b)} f(x) = y_{\min}$ ;
    - Ако интервалът е затворен от двете страни, намираме  $y_{\max}, y_{\min}, f(a), f(b)$  и по-голямото от тези числа е НГС, а по-малкото – НМС.
- Може да се разгледат следните начини за намиране на НГС и НМС:

**Бележка:**

Условието на всички следващи задачи е: Намерете най-малката и най-голяма стойност на функциите в зададения интервал.

**1. Метод на производните**

Зад. 10:  $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$  а)  $x \in [-1; 1]$ ; б)  $x \in [-1; 3]$ .

Решение: а) Намираме първата производна  $f' = 9x^2 - 18x$ . Намираме критичните точки  $9x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow 9x(x - 2) = 0$ ;  $x_1 = 0, x_2 = 2$ . Второто решение не принадлежи на разглеждания интервал  $[-1; 1]$ , затова функцията евентуално може да има екстремум при  $x_1 = 0$ . Намираме вида на този екстремум като изследваме знака на втората производна  $f'' = 18x - 18$ ;  $f''(0) = 18 \cdot 0 - 18 = -18 \Rightarrow f''(0) < 0$  т.е. при  $x_1 = 0$  функцията има локален максимум. Намираме стойността на този максимум  $y_{\max} = f(0) = 3 \cdot 0 - 9 \cdot 0 + 2 = 2$ . Щом имаме само един локален екстремум, то той е и най-голямата стойност в този интервал, т.е.  $\max_{x \in [-1; 1]} y = f(0) = 2$ . За да намерим НМС, намираме стойността на функцията в краищата на затворения интервал  $f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 -$

$9 \cdot (-1)^2 + 2 = -10$ ;  $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 2 = -4 \Rightarrow \min_{x \in [-1; 1]} y = f(-1) = -10$

б)  $f' = 9x^2 - 18x = 0$ ;  $x_1 = 0, x_2 = 2$ . И двете решения принадлежат на интервала  $[-1; 3]$ . Намираме втората производна  $f'' = 18x - 18$  и изследваме знака и в двете точки:  $f''(0) = 18 \cdot 0 - 18 = -18 \Rightarrow f''(0) < 0$ , т.е. при  $x_1 = 0$  функцията има локален максимум. Намираме стойността му  $y_{\max} = f(0) = 3 \cdot 0 - 9 \cdot 0 + 2 = 2$ ;  $f''(2) = 18 \cdot 2 - 18 = 18 \Rightarrow f''(2) > 0$ , т.е. при  $x_1 = 2$  функцията има локален минимум. Намираме стойността на този минимум  $y_{\min} = f(2) = 3 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 2 = 24 - 36 + 2 = -10$ . Намираме стойността на функцията в краищата на интервала  $f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 2 = -10$ ;  $f(3) = 3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 2 = 2$ . Най-малкото от числата  $y_{\max}, y_{\min}, f(-1)$  и  $f(3)$  е НМС, а най-голямото – НГС:  $\max_{x \in [-1; 3]} y = f(3) = f(0) = 2$ ;  $\min_{x \in [-1; 3]} y = f(-1) = f(2) = -10$

**Бележка:**

Ако в Зад. 11 изследвахме в отворен интервал отдясно, т.е.  $x \in [-2; 3)$ , то функцията  $y$  няма да има най-голяма стойност, тъй като има стойности, произволно близки до 18

Зад. 13:  $y = (1 + \cos x) \sin x$ ;  $x \in [0; \pi]$ .

Решение:  $f' = \cos x (1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ . Пол.  $\cos x = t$ ;  $2t^2 + t - 1 = 0$ ;  $t_1 = -1, t_2 = 0,5$ . Тогава:

А)  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ . Разглеждаме интервала  $[0; \pi]$  затова  $x_1 = \pi$ .

В)  $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ . Разглеждаме интервала  $[0; \pi]$  затова  $x_2 = \frac{\pi}{3}$

$f'' = -4\cos x \cdot \sin x - \sin x$ .  $f''(\pi) = -4 \cdot 1 \cdot 0 - 0 = 0$ , т.е. точката  $x_1 = \pi$  от графиката на дадената функция е инфлексна и няма екстремум, а графиката само преминава от вдлъбната в изпъкнала (или обратно). Изследваме в другата точка

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$  следователно при  $x = \frac{\pi}{3}$  функ-

цията има  $\max$ .  $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ;  $f(\pi) = f(0) = 0$ . Сле-

дователно  $\max_{x \in [0; \pi]} y = y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ;  $\min_{x \in [0; \pi]} y = f(0) = 0$

**2. Метод на растяща и намаляваща функция**

Зад. 15:  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-x^2-2}$

**Решение:** Д.М.:  $\forall x$  следователно изследваме функцията  $y$  в този интервал. Полагаме  $g(x) = 2x - x^2 - 2$ . Дадената задача изглежда така:  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$ . Щом основата

е по-малка от 1, то функцията  $y$  е намаляваща. Прилагаме **Свойство 3 (2)** на показателна функция и получаваме

$$\begin{cases} \max_{\forall x} y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\min_{\forall x} g(x)} \\ \min_{\forall x} y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\max_{\forall x} g(x)} \end{cases} . \text{ Следователно първо трябва да на-}$$

мерим най-голямата и най-малка стойност на функцията  $g(x)$  за  $\forall x$ .  $g' = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . В тази точка функцията  $g(x)$  има екстремум. За да определим вида на екстремума, намираме втората производна  $g'' = -2 < 0$ . Следователно в точката  $x = 1$  функцията  $g(x)$  има max, като  $g_{\max} = g(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 - 2 = -1$ , тогава

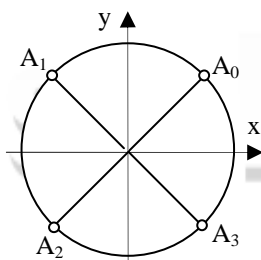
$$\min_{\forall x} y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\max_{\forall x} g(x)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 . \text{ Функцията } y \text{ няма най-голяма стойност.}$$

### 3. Метод на субституцията (въвеждане на ново неизвестно)

Зад. 17:  $y = \cos 4x + 2 \sin 2x + 3; \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

**Решение:** Преобразуваме условието с помощта на формула (34) от Тригонометрични формули.  $y = 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x + 3 = -2\sin^2 2x + 2\sin 2x + 4$ . Полагаме  $g(t) = \sin 2x = t$  и получаваме нова функция  $f(t) = -2t^2 + 2t + 4$ . За да намерим интервала, в който се променя  $t$ , т.е. Д.М.<sub>t</sub>, трябва да изследваме за най-голяма стойност и най-малка стойност на функцията  $g(t)$  при  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ :

$$g' = 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi . \text{ Намираме съответните ъгли:}$$



Фиг. 7

При  $k = 0$  имаме  $(A_0) \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ; При  $k = 1$  имаме  $(A_1) \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ; и ги нанасяме върху три-

гонометричната окръжност (Фиг. 7). При  $k = 2$  имаме  $(A_2) \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ; При  $k = 3$  имаме  $(A_3) \rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ .

В дадения интервал  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  са само решенията  $A_0$ . Определяме екстремума в тази точка

$$g'' = -4 \sin 2x; \quad g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \sin \frac{2\pi}{4} = -4 \cdot 1 < 0 \Rightarrow g_{\max} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1; \quad g(0) = 0;$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]} g = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad \min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]} g = g(0) = 0 \Rightarrow t \in [0; 1]$$

Сега намираме най-голямата и най-малката стойност на функцията  $f(t)$  в интервала  $t \in [0; 1]$ .

$$f'(t) = -4t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}; \quad f''(t) = -4 < 0 \Rightarrow f_{\max}(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{9}{2}$$

$$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4 = 4; \quad f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 4 \Rightarrow \max_{t \in [0; 1]} f(t) = f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2};$$

$$\min_{t \in [0; 1]} f(t) = f(0) = f(1) = 4 \Rightarrow \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]} y = \max_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{9}{2}; \quad \min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]} y = \min_{t \in [0; 1]} f(t) = 4$$

### 4. Метод на използване апарата на квадратното уравнение

Зад. 18:  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

**Решение:** Не е даден интервала, в който ще изследваме, затова изследваме в Д.М. на дадената функция. Д.М.<sub>y</sub>:  $x^2 + x + 1 \neq 0$ ;  $D < 0$  следователно изследваме функцията  $y$  за  $\forall x$ . Приемаме  $y$  за параметър и търсим за кои стойности на параметъра полученото параметрично уравнение има реални корени. Привеждаме уравнението под общ знаменател и преобразуваме:  $y(x^2 + x + 1) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow yx^2 + yx + y - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$ . Това уравнение има реални корени ако:

A)  $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ . Тогава  $f(x) = 0x^2 + (1 + 1)x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \text{Д.М.}_x$  (което е  $\forall x$ ). Следователно  $y = 1$  е решение.

B)  $y - 1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$ . Тогава  $f(x)$  е квадратно уравнение, което има реални корени,

ако дискриминантата му е по-голяма или равна на 0, т.е.  $D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)(y - 1) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 8y - 4 = -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$ . Но разглеждаме случая, когато  $y \neq 1$ , тогава  $y \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3]$

От А) и В) следва, че  $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right] \Rightarrow \max_{\forall x} y = 3; \min_{\forall x} y = \frac{1}{3}$ .

## 5. Метод на сбор от неотрицателни числа

### Определение:

Средно аритметично на две неотрицателни числа  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  е по-голямо или равно на средно геометричното им, т.е.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  (1)

като равенството се постига при  $a = b$ .

Аналогично неравенство е вярно и за краен брой неотрицателни числа

$a_1, a_2, \dots, a_n$ , т.е.  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  (2)

където равенството се достига при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Неравенствата (1) и (2) се наричат неравенство на Коши. Те могат да се използват за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция, която е сбор от неотрицателни числа. Това става по следните начини:

1) Ако  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  са променливи неотрицателни числа, но тяхната сума не се променя (т.е.  $a + b = k = \text{const}$ ), тогава от (1) следва  $\frac{1}{4}(a+b)^2 \geq ab$ , т.е. произведението  $a \cdot b$  има най-голяма стойност  $\frac{1}{4}k^2$ , която се получава при  $a = b$ .

2) Ако  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  са променливи неотрицателни числа, но тяхното произведение не се променя (т.е.  $a \cdot b = k = \text{const}$ ), тогава от (1) следва  $a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$  т.е. сумата  $a + b$  има най-малка стойност  $2\sqrt{k}$ , която се получава при  $a = b$ .

### Бележка:

Аналогични на горните разсъждения са в сила и за произволен брой неотрицателни числа.

Произведението  $a \cdot b \cdot c$  има най-голяма стойност  $\left(\frac{k}{3}\right)^3$  при  $a = b = c$ .

Сборът на  $a+b+c$  има най-малка стойност  $3\sqrt[3]{k}$  при  $a = b = c$ .

Произведението  $a \cdot b \cdot c \cdot d$  има най-голяма стойност  $\left(\frac{k}{4}\right)^4$  при  $a = b = c = d$ .

Сборът на  $a+b+c+d$  има най-малка стойност  $4\sqrt[4]{k}$  при  $a = b = c = d$ .

Зад. 19:  $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1}$

Решение: Д.М.:  $\forall x$ . Преобразуваме  $y = 3^x 3^{-1} + 3^{-x} 3^{-1} = \frac{3^x}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^x} = \frac{1}{3} \left( 3^x + \frac{1}{3^x} \right)$ . По-

лагаме  $3^x = t > 0$  и получаваме  $y(t) = \frac{1}{3} \left( t + \frac{1}{t} \right)$ . Функцията  $y(t)$  е сбор от две неотрицателни числа  $a = t$  и  $b = \frac{1}{t}$ . Затова можем да използваме неравенството на Коши (1).

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{1} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2$ ;  $y(t) = \frac{1}{3} \left( t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{2}{3}$ . От Определе-

нието следва, че най-малката стойност на  $y$  е  $\frac{2}{3}$  и тя се постига при  $a = b$ , т.е.

$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t_1 = -1 \notin \text{Д.М.}$ ,  $t_2 = 1 \in \text{Д.М.}$ . Следователно  $\min_{\forall x} y = y(1) = \frac{2}{3}$ , а няма най-голяма стойност.

### Бележка:

Ако при търсенето на абсолютни екстремуми на някаква функция  $f(x)$ , която е дефинирана в интервала  $[a; b]$  с използване на неравенството на Коши, сме получили, че равенството се постига при  $x = c \notin [a; b]$ , Това показва, че първата производна не се анулира в интервала  $[a; b]$ , т.е. функцията  $f(x)$  е или растяща, или намаляваща в този интервал. Тогава най-малката и най-голямата стойност на  $f(x)$  се получават в краищата на интервала, т.е. при  $x = a$  и  $x = b$ .

## VII. Доказване на неравенства

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) ; E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

Зад. 20: Дадени са функциите  $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{(3-x)^2} - 2$ ;  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2 - 18x + 25}$ .

- а) Да се докаже, че  $g(x) \leq 4$  за всяка реална стойност на  $x$ .  
 б) Да се намери най-голямата и най-малка стойност на  $f(x)$  за  $x \in [1; 4]$ .  
 в) Да се реши уравнението  $f(x) = g(x)$  за  $x \in [1; 4]$ . (ЛТУ, 2001)

**Решение:** а) За да докажем неравенството  $g(x) \leq 4$ , трябва да докажем, че функцията  $g(x)$  има най-голяма стойност 4. За целта полагаме  $\varphi(x) = 3x^2 - 18x + 25$  и получаваме  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi(x)}$ . Тази показателна функция е намаляваща (защото основата и е

по-малка от 1). От **Свойство 3 (2)** можем да запишем  $\max_{\forall x} g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\min_{\forall x} \varphi(x)}$ , т.е. дос-

татъчно е да намерим най-малката стойност на  $\varphi(x)$ . Функцията  $\varphi(x)$  е квадратна и параболата и е с върха надолу (защото коефициента пред най-високата степен на неизвестното е положителен). Знаем, че в такъв случай  $\min$  е в точка  $x = -\frac{b}{2a}$ . В

нашия случай това е  $x = 3$ . Тогава  $\varphi_{\min} = \varphi(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 25 = -2$  т.е.

$\min_{\forall x} \varphi = \varphi_{\min} = \varphi(3) = -2$ . И сега  $\max_{\forall x} g = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$ . С това доказахме, че  $g(x) \leq 4$  за

всяка стойност на  $x$ .

б) Д.М.:  $\forall x$ . Представяме корена като степен и намираме първа производна  $f' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (3-x)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (-1) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{3-x}}$ . Тази производна не е дефинирана при  $x = 3$

(рогова точка). Това е едната критична точка. Решавайки неравенството  $f'(x) \geq 0$  обединяваме стъпките за намиране на интервалите, в които функцията расте и точките, в които тя има локален екстремум

$$2 - \frac{2}{\sqrt[3]{3-x}} \geq 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{3-x}-1}{\sqrt[3]{3-x}} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{A) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{3-x} > 0 \\ \sqrt[3]{3-x}-1 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3-x > 0 \\ \sqrt[3]{3-x} \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ 3-x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x \leq 2 \end{array} \right\} \\ \text{B) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{3-x} < 0 \\ \sqrt[3]{3-x}-1 \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$$

Но ние изследваме в интервала  $x \in [1; 4]$ , следователно функцията  $f(x)$  расте

при  $x \in [1; 2] \cup (3; 4]$ , а при  $x \in (2; 3)$  функцията  $f(x)$  намалява. Резултатите от това изследване показваме в долната таблица.

	1	2	3	4
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗		↘	↗

От таблицата се вижда, че функцията  $f(x)$  има  $\max$  при  $x = 2$  (при  $x = 3$  няма  $\min$  защото  $f'(x)$  не е дефинирана). Намираме стойността на функцията в двете критични точки и в краищата на интервала

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3\sqrt[3]{(3-1)^2} - 2 = 3\sqrt[3]{4}; \quad f(2) = 2 \cdot 2 + 3\sqrt[3]{(3-2)^2} - 2 = 5$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 3\sqrt[3]{(3-3)^2} - 2 = 4; \quad f(4) = 2 \cdot 4 + 3\sqrt[3]{(3-4)^2} - 2 = 9$$

$$\text{Тогава } \max_{\forall x} f = f(4) = 9; \quad \min_{\forall x} f = f(3) = 4$$

в) Решаваме уравнението  $f(x) = g(x)$  графично. В б) доказахме, че най-малката стойност на  $f(x)$  е 4 т.е.  $f(x) \geq 4$ , а в а) доказахме, че най-голямата стойност на  $g(x)$  е също 4 т.е.  $g(x) \leq 4$ . Затова можем да запишем  $g(x) \leq 4 \leq f(x)$  за всяко  $x$ . Знаем, че  $f(x)$  достига най-малката си стойност 4 при  $x = 3$ . Очевидно при  $x = 3$  имаме  $f(3) = g(3) = 4$ , а при  $x \neq 3$  получаваме  $g(x) < 4 < f(x)$ . Тогава уравнението  $f(x) = g(x)$  има едно единствено решение  $x = 3$ .

## VIII. Графично решаване на уравнение

Зад. 22: Дадени са функцията  $f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14}$ .

а) Да се реши уравнението  $f(x) = \sqrt{7} + \sqrt{14}$ . (СУ, 2003)

**Решение:** а) Уравнението преобразуваме по следния начин  $x^2 + 2x + \sqrt{3(x^2 + 2x) + 7} + \sqrt{5(x^2 + 2x) + 14} = \sqrt{7} + \sqrt{14}$  (А). Полагаме  $y = x^2 + 2x$  (В), и получаваме уравнението  $y + \sqrt{3y + 7} + \sqrt{5y + 14} = \sqrt{7} + \sqrt{14}$  (С). Очевидно дясната страна на това уравнение е число, а лявата страна означаваме с  $g(y) = y + \sqrt{3y + 7} + \sqrt{5y + 14}$ . За да решим уравнение (С), трябва да намерим точката, в която функцията  $g(y)$  се пресича с числото  $\sqrt{7} + \sqrt{14}$ . Изследваме (В), за да намерим най-малката и най-голямата стойност на  $y$ . Намираме  $y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ ;  $y'' = 2 > 0$  следователно при  $x = -1$  имаме  $\min$  и  $y_{\min} = y(-1) = -1$ . Сега изследваме функцията  $g(y)$  в интервала  $y \in [-1; +\infty)$ :  $g' = 1 + \frac{3}{\sqrt{3y+7}} + \frac{5}{\sqrt{5y+14}}$ . Второто и трето-

то число са положителни (защото коренът в знаменателя е

винаги положителен). Затова можем да запишем  $g' > 0$  за  $\forall u$ , т.е. функцията  $g(u)$  в интервала  $u \in [-1; +\infty]$  е само растяща. Следователно уравнение (C) ще има само едно решение. С непосредствена проверка се вижда, че единственото решение е  $u = 0$ . Заместваме в (B)  $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$ . Това са и решенията на уравнение (A), т.е. на даденото уравнение.

## IX. Определяне броя на корените и разположението им върху числовата ос

В зад. 22 показвахме, че ако една функция  $f(x)$  е растяща в даден интервал, тя има само един корен. Може да се изведе правило за определяне броя на корените на уравнение  $f(x) = 0$ .

### Правило:

- ◆ Разделяме Д.М. на интервали, в които функцията  $f(x)$  е монотонна.
- ◆ Определяме знака на  $f(x)$  в краищата на всеки интервал, в който тя е монотонна. Ако интервалът е отворен, пресмятаме границата в краищата на интервала.
- ◆ Определяме броя на корените във всеки от разглежданите интервали:
  - ако знаците в края на интервала са еднакви, в него уравнението няма корени;
  - ако знаците са различни, то уравнението има точно един корен в този интервал.

Зад. 23: Да се определят броят и разположението на корените на уравнението:

- а)  $2x^3 - 9x^2 + 12x - 6 = 0$ ;  
 б)  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7 = 0$

Решение: а) Означаваме лявата страна с функцията  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

- 1) Разделяме ДМ на интервали, в които  $f(x)$  е монотонна, т.е. решаваме уравнението  $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$ . Тези точки разделят ДМ на интервалите  $(-\infty; 1), (1; 2), (2; +\infty)$ , в които  $f'(x)$  има постоянен знак, т.е.  $f(x)$  е монотонна.
- 2) Определяме знака на  $f(x)$  в краищата на всеки от горните интервали.

За интервала  $(-\infty; 1)$  имаме

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) = -\infty \cdot 2 = -\infty \text{ и } f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 +$$

$12 \cdot 1 - 6 = -1$ , следователно в краищата на интервала  $(-\infty; 1)$  функцията има еднакви знаци т.е. уравнението  $f(x) = 0$  няма корени в този интервал.

За интервала  $(1; 2)$  имаме  $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 6 = -1$  и  $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 6 = -2$ , следователно в краищата на интервала  $(1; 2)$  функцията има еднакви знаци т.е. уравнението  $f(x) = 0$  няма корени в този интервал.

За интервала  $(2; +\infty)$  имаме  $f(2) = -2$  и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 6) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) = \infty \cdot 2 = \infty, \text{ следователно в краищата на}$$

интервала  $(2; +\infty)$  функцията има различни знаци, т.е. уравнението  $f(x) = 0$  има точно един корен в този интервал.

Окончателно получаваме, че уравнението  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6 = 0$  има един корен  $x_0$ . Можем да определим дори между кои цели числа е този корен. Знаем, че  $f(2) = -2 < 0$ . Намираме  $f(3) = 3 > 0$ . Затова корена на даденото уравнение се намира между числата 2 и 3 т.е.  $2 < x_0 < 3$ .

б) Означаваме лявата страна с функцията  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7$

1) Намираме първата производна  $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 2(2x^3 - 9x^2 + 12x - 6) = 0$ . Не можем директно да решим това уравнение. Затова изразя в скобите означаваме с функцията  $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ . Тогава можем да запишем  $f'(x) = 2g(x) = 0$ . В а) доказахме, че функцията  $g(x)$  има един корен, следователно уравнението  $f'(x) = 2g(x) = 0$  ще има само един корен. Нека този корен да означим с  $x_0$ .

Щом производната  $f'(x)$  се нулира при  $x_0$ , то в интервалите  $(-\infty; x_0)$  и  $(x_0; +\infty)$  функцията  $f(x)$  е монотонна.

2) Определяме какъв е знакът на функцията  $f(x)$  в краищата на всеки интервал

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{12}{x^3} + \frac{7}{x^4} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty. \text{ Знаем от а),}$$

че корена  $x_0$  се намира между  $2 < x_0 < 3$ . Затова намираме  $f(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 7 = -1 < 0$  и  $f(3) = 3^4 - 6 \cdot 3^3 + 12 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 7 = -2 < 0$ , т.е. показвахме, че в краищата на двата интервала  $(-\infty; x_0)$  и  $(x_0; +\infty)$  функцията  $f(x)$  има различни знаци. Затова даденото уравнение има по едно решение във всеки интервал, т.е. уравнението има два корена  $x_1 \in (-\infty; x_0)$  и  $x_2 \in (x_0; +\infty)$ . Можем да определим дори между кои цели числа са тези корени, като изчислим  $f(1) = 2, f(2) = -1, f(3) = -2, f(4) = 23$ . Тогава записваме  $x_1 \in (1; 2)$  и  $x_2 \in (3; 4)$ .

## Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

---

център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) раздел „За нас“.

Учебен център

"СОЛЕМА"

[www.solemabg.com](http://www.solemabg.com)