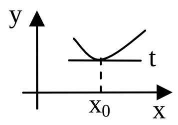
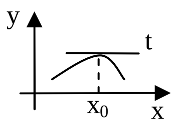
Приложение на производните

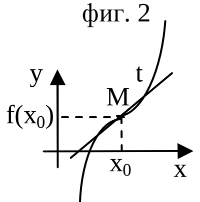
I. Изпъкналост и вдлъбнатост



фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3

Определения:

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната около точка x_0. В тази точка от графиката да построим допирателна t.

Изпъкнала (гледана отдолу) – Функцията $f(x)$ е изпъкнала в точка x_0, ако точките от графиката около x_0 са над допирателната (Фиг. 1).

Вдлъбната (гледана отдолу) – Функцията $f(x)$ е вдлъбната в точка x_0, ако точките от графиката около x_0 са под допирателната (Фиг. 2).

Инфлексна точка – Ако функцията $f(x)$ е изпъкнала от едната страна на x_0, а от другата страна е вдлъбната, то точката $M(x_0, f(x_0))$ се нарича инфлексна точка (Фиг. 3).

Теореми:

Условия за изпъкналост и вдлъбнатост – Ако функцията $f(x)$ има втора производна навсякъде в интервала $[a, b]$ и

- $f''(x) > 0$ за $\forall x \in [a, b]$, то $f(x)$ е изпъкнала в интервала $[a, b]$;
- $f''(x) < 0$ за $\forall x \in [a, b]$, то $f(x)$ е вдлъбната в интервала $[a, b]$.

Условия за инфлексна точка – Ако функцията $f(x)$ е два пъти диференцирана в интервала $[a, b]$ и $f''(x) = 0$, то точката $M(x_0, f(x_0))$ е инфлексна точка (Фиг. 3).

Зад. 1: Да се изследват относно изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексна точка, функциите:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = x^4 - 2x$

Решение: а) Намираме втората производна: $f' = 3x^2 - 3$; $f'' = 6x$. При $x < 0$ функцията е вдлъбната (защото $f''(x) < 0$). При $x > 0$ функцията е изпъкнала (защото $f''(x) > 0$). При $x = 0$ функцията има инфлексна точка $(0, 0)$, защото в тази точка функцията променя знака си.

б) Намираме втората производна: $f' = 4x^3 - 2$; $f'' = 12x^2$. За всяко $x \neq 0$ имаме $f''(x) > 0$. Следователно дадената функция е само изпъкнала.

Бележка:

При $x = 0$ имаме $f''(x) = 0$, но точката $(0, 0)$ не е инфлексна защото $f''(x)$ не променя знака си.

II. Монотонност (растене и намаляване) на функция

Определения:

Растяща – Една функция $f(x)$ е растяща в интервала $[a; b]$, когато за всеки две стойности $x_1 \in$ Д.М. и $x_2 \in$ Д.М. за които $x_1 \geq x_2$ е изпълнено $f(x_1) \geq f(x_2)$ (функцията е строго растяща, ако за $x_1 > x_2$ е изпълнено $f(x_1) > f(x_2)$).

Намаляваща – Една функция $f(x)$ е намаляваща в интервала $[a; b]$, когато за всеки две стойности $x_1 \in$ Д.М. и $x_2 \in$ Д.М. за които $x_1 \geq x_2$ е изпълнено $f(x_1) \leq f(x_2)$ (функцията е строго намаляваща, ако за $x_1 > x_2$ е изпълнено $f(x_1) < f(x_2)$).

Правило за намиране на интервала на монотонност:

1. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Намираме Д.М.;
2. Функцията $f(x)$ е диференцируема в (a, b) т.е. Намираме първата и производна;
3. Определяме интервалите на монотонност: Ако за $\forall x \in (a, b)$:
   - $f'(x) > 0$, то функцията $f(x)$ е растяща в $[a, b]$ т.е. решаваме $f'(x) > 0$;
   - $f'(x) < 0$, то функцията $f(x)$ е намаляваща в $[a, b]$ т.е. решаваме $f'(x) < 0$.

Растяща или намаляваща функция се нарича общо монотонна.

Ако за всяка точка от интервала $[a; b]$ производната е равна на нула, то функцията ще бъде едновременно растяща и намаляваща т.е тя ще е константа. **Например:** $f(x) = ax + b$, където a и b са константи. Когато $a > 0$, функцията $f(x)$ е строго растяща. Когато $a < 0$, функцията $f(x)$ е строго намаляваща. Когато $a = 0$, функцията $f(x)$ не е нито намаляваща, нито растяща (защото в този случай имаме $f(x) = const$).

Бележка:

Свойствата: монотонност, ограниченост, непрекъснатост в интервал, четност и нечетност, периодичност, се отнасят за всички точки от дадено множество. Затова те се наричат *глобални свойства*.
Свойствата: граница, непрекъснатост в точка, диференцируемост, се отнасят за поведението на функцията в дадена точка. Тези свойства се наричат *локални свойства*.

Зад. 2: Да се намерят интервалите на растене и намаление на функциите:

а) $f(x) = 2x - x^2$; б) $f(x) = 3x^3$ в) $f(x)=\frac{1}{x}$

Решение: а) Д.М.: $\forall x$. Функцията f(x) е непрекъсната и диференцируема за $\forall x \in$ Д.М. Намираме първата производна: $f' = 2 - 2x = 2(1 - x)$. Решаваме $f'(x) > 0 \Rightarrow 2(1 - x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Следователно функцията f(x) е растяща в интервала $(-\infty; 1)$. Решаваме $f'(x) < 0 \Rightarrow 2(1 - x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$. Следователно функцията f(x) е намаляваща в интервала $(1; +\infty)$.

б) Д.М.: $\forall x$. Функцията f(x) е непрекъсната и диференцируема за $\forall x \in$ Д.М. и $f' = 9x^2$. При $x<0$ имаме $f'(x)>0$. Следователно f(x) е растяща в интервала $(-\infty; 0]$. При $x>0$ имаме също $f'(x)>0$. Следователно функцията f(x) е растяща в интервала $[0; +\infty)$. Двата интервала имат обща точка и затова можем да кажем, че f(x) е растяща в интервала $(-\infty; +\infty)$.

в) Д.М.: $\forall x \neq 0$. Функцията f(x) е непрекъсната и диференцируема за $\forall x \in$ Д.М. и $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. При $x<0$ имаме $f'(x)<0$. Следователно f(x) е намаляваща в интервала $(-\infty; 0)$. При $x>0$ имаме също $f'(x)<0$. Следователно функцията f(x) е намаляваща в интервала $(0; +\infty)$.

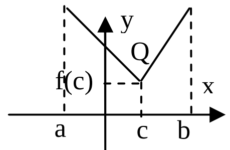
Бележка:

Не можем да направим извода (както при горния пример), че f(x) е намаляваща функция в целия интервал, защото ДМ е множество от два интервала.

III. Рогова точка

Определение:

Точка от графиката, в която функцията има екстремум, но няма първа производна (или първата производна не съществува) се нарича *рогова точка* (Точка Q от Фиг. 4)



Фиг. 4

В роговата точка се правят изследвания за екстремум.

Например: Функцията f(x) е дефинирана и непрекъсната в интервала [a, b] (Фиг. 4). Нека първата производна да е $f'(x)$, но тя да не съществува при $x = c$. Затова точката Q от графиката с координати Q (c, f(c)) се нарича рогова точка.

Зад. 3: Да се намери първата производна на:

а) $f(x) = |x|$. б) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

Решение: а) ДМ: $\forall x$. Дадената функция изглежда по следния начин $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ при } x<0 \\ x, \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$. Тогава $f'(x)=\begin{cases} -1, \text{ при } x<0 \\ 1, \text{ при } x>0 \end{cases}$, като $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ не съществува, защото $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1$, т.е. лявата и дясната граница при $x \to 0$ не съвпадат. Казваме, че функцията $f(x) = |x|$, при $x = 0$ има лява производна – 1 и дясна производна 1, но производна няма. Тогава точката с координати (0; 0) се нарича рогова точка (на Фиг. 4 роговата точката Q (0; 0) е в центъра на координатната система). В роговата точка графиката има “лява” допирателната с ъглов коефициент – 1 и “дясна” допирателна с ъглов коефициент 1, но допирателна няма.

б) ДМ: $\forall x$. $f'(x)=\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-2)}}$ т.е. можем да намерим първата производна, но тя не е дефинирана при $x = 2$. Следователно точката от графиката с абсциса $x = 2$ е рогова точка.

IV. Критични точки

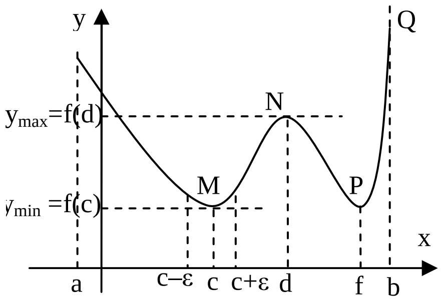
Точките от ДМ на функция, при които първата производна не съществува (рогова точка) или първата производна е равна на нула (точките с локален екстремум) се наричат критични точки.

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

V. Локален екстремум

Нека да имаме функцията $f(x)$, която е дефинирана в интервала $[a; b]$, и нека уравнението $f'(x) = 0$ да има корени $x_1 = c \in [a; b]$ и $x_2 = d \in [a; b]$. От графиката на Фиг. 5 се вижда, че точките c, d и f разделят графиката на четири интервала:

- За $x \in [a; c)$ функцията $y = f(x)$ намалява;
- За $x \in (c; d)$ функцията $y = f(x)$ расте;
- За $x \in (d; f)$ функцията $y = f(x)$ намалява;
- За $x \in (f; b]$ функцията $y = f(x)$ расте;



фиг. 5

Определения:

Локален min: Функцията $f(x)$, която е дефинирана в интервала $[a; b]$, има локален min в точката $x_1 = c \in [a; b]$, когато може да се намери достатъчно малка околност около т. c (например на Фиг. 5 околността $(c–\varepsilon; c+\varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$), в която няма стойност на $f(x)$ по-малка от $f(c)$, т.е. имаме $f(x) \geq f(c)$.

Локален max: Функцията $f(x)$, която е дефинирана в интервала $[a; b]$, има локален max в точката $x_1 = d \in [a; b]$, когато може да се намери достатъчно малка околност около т. d (например на Фиг. 5 околността $(d–\varepsilon; d+\varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$), в която няма стойност на $f(x)$ по-малка от $f(d)$, т.е. имаме $f(x) \leq f(d)$.

Общото название на локален max и min е локален (местен) екстремум. Ако функцията $f(x)$ има локален min се записва f_{min}, ако има локален max – записваме f_{max}.

Бележки:

- Една функция може да има повече от един локален екстремум (На Фиг. 5 имаме два локални min (в т. M и т. P) и един локален max (в т. N). Някои функции (например y=sin x) имат безброй локални екстремуми;
- Една функция може да няма локален екстремум (Например: y=tg x; y=x и т.н.);
- Локалният екстремум не трябва да се смесва с най-малка и най-голяма стойност на функцията (Например от фиг. 5 най-голямата стойност на функцията е в т. Q, но там няма локален екстремум. Дори точката с локален min може да бъде по-високо от точката с локален max;
- В точките с локален екстремум производната е равна на нула, т.е. допирателната в съответните точки от графиката е успоредни на оста Ox (ъгловия коефициент k = 0);
- Една функция може да няма производна в дадена точка, т.е. първата и производна да не е дефинирана в дадена точка, но да има локален екстремум в тази точка. Например: в роговата си точка функцията има локален екстремум, но няма производна.

Отчитайки определенията и теоремите за съществуването на локален екстремум, можем да запишем следните правила за намирането му:

Правила:

I правило

(достатъчно условие за съществуване на локален екстремум)

Първа стъпка: Намираме Д. М. и проверяваме за <u>непрекъснатост</u> в тази Д. М. (защото функцията трябва да бъде дефинирана и непрекъсната в даден интервал $[a; b]$, за да има екстремум). Намираме първата производна.

Втора стъпка: Определяме критичните точки:

- точките, в които функцията няма първа производна (знаем, че това са <u>роговите точки</u>);
- точките, в които първата производна се анулира, т.е. решаваме уравнението $f'(x) = 0$. Нека решенията му са $x_1 = c$ и $x_2 = d$ (фит. 5). Така определяме точките, в които функцията евентуално може да има локален екстремум. Ако уравнението $f'(x) = 0$ няма решение , то функцията няма екстремум, т.е. $f(x)$ е само растяща (или намаляваща);

Трета стъпка: Ако съществува първата производна (т.е. нямаме рогова точка), намираме втората производна. Ако тя не може да се намери, продължаваме изследването по <u>II правило</u>;

Четвърта стъпка: Изследваме знака на втората производна в точките на екстремум:

- Ако $f''(c)>0$, то в тази точка функцията има локален min. За да намерим стойността на функцията в точката на локалният min, заместваме съответния корен (например: c) във функцията, т.е. намираме $y_{min} = f(c)$. На фиг. 5 точката с локален минимум е $M(c; f(c))$;
- Ако $f''(d)<0$, то в тази точка функцията има локален max. За да намерим стойността на функцията в точката на локалният max, заместваме съответния корен (например: d) във функцията, т.е. намираме $y_{max} = f(d)$. На фиг. 5 точката с локален максисум е $N(d; f(d))$;
- Ако $f''(d) = 0$, то в тази точка функцията има <u>инфлексия</u>, т.е. това е точка, в която функцията не променя знака си, а само преминава от вдлъбната в изпъкнала (или обратното)

II правило

(необходимо условие за съществуване на локален екстремум)

Първите две стъпки се повтарят от <u>I Правило</u>;

Трета стъпка: Изследваме знака на първата производна във всеки от интервалите, т.е. определяме в кои интервали функцията е растяща (решаваме неравенството $f'(x) > 0$) или намаляваща (решаваме неравенството $f'(x) < 0$). Точката, при която функцията от намаляваща преминава в растяща, имаме локален min, а от растяща в намаляваща – локален max.

Зад. 4: Намерете локалните екстремуми на функцията $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

<u>Решение:</u> Д.М.: $\forall x$. Намираме първата производна: $f' = 3x^2 - 6x - 9$. Определяме критичните точки, като приравним първата производна на нула: $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$.

<u>Първи начин</u>: Прилагаме третата стъпка на <u>I правило</u>: Намираме втората производна: $f'' = 6x - 6$. Проверяваме знака на втората производна в точките на екстремум: $f''(3) = 6.3 - 6 = 12 > 0$. Следователно функцията в тази точка има min. Намираме стойността на този локален минимум, като заместим във функцията, т.е. $y_{min} = f(3) = 3^3 - 3.3^2 - 9.3 + 6 = -21$;
$f''(-1) = 6.(-1) - 6 = -12 < 0$. Следователно функцията в тази точка има max. Намираме стойността на този локален максимум, като заместим във функцията, т.е. $y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 - 9.(-1) + 6 = 11$.

<u>Втори начин</u>: За да определим вида на локалните екстремуми, изследваме знака на първата производна в критичните точки (трета стъпка <u>II правило</u>) т.е. решаваме неравенството $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 > 0$. Резултатите нанасяме в таблицата:

	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

От таблицата виждаме, че при $x = -1$ имаме локален max, а при $x = 3$ имаме локален min. Стойността на max и min намираме, като заместим във функцията: $y_{min} = f(3) = 3^3 - 3.3^2 - 9.3 + 6 = -21$ и $y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 - 9.(-1) + 6 = 11$.

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Зад. 5: Намерете локалните екстремуми на функцията $y=\dfrac{5x-3}{x+2}$

<u>Решение:</u> Д.М.: ∀x ≠ – 2. Намираме първата производна:
$f'=\dfrac{5(x+2)-(5x-3)}{(x+2)^2}=\dfrac{5x+10-5x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{13}{(x+2)^2}$. Точката, в която първата производна не съществува е – 2, но тя не принадлежи на Д.М. Следователно x = – 2 не е критична точка. Уравнението f′ = 0 няма решение. Следователно дадената функция няма екстремум (f′ (x) > 0 за ∀x затова функцията е само растяща).

Зад. 6: Намерете локалните екстремуми на функцията $y = |1 – x^2|$.

<u>Решение:</u> Д.М.: ∀x. Използвайки свойствата на модула, дадената функция и нейната производна могат да се запишат по следния начин:

$$y=\begin{cases}-(1-x^2), & при\ x<-1\\ 1-x^2, & при\ x\in[-1;1);\\ -(1-x^2), & при\ x\geq 1\end{cases}\qquad f'=\begin{cases}2x, & при\ x<-1\\ -2x, & при\ x\in(-1;1)\\ 2x, & при\ x>1\end{cases}$$

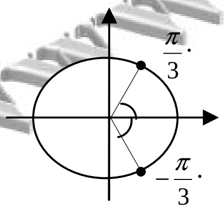
Критичните точки са: x = ±1 (точките, в които първата производна не съществува, т.е. това са роговите точки) и x = 0 (точката, при която първата производна е равна на нула и в трите интервала). В тези три точки изследваме функцията за локален екстремум, като определяме знака и в четирите интервала:

	– ∞	– 1	0	1	+∞
f′ (x)	–	‖ +	0	+ ‖	
f (x)	↘	↗	↘	↗	

От таблицата се вижда, че при x = ±1 функцията има min и той е f(– 1) = f(1) = 0, а при x = 0 – има максимум и той е f(0)=1.

Зад. 7: Намерете локалните екстремуми на функцията
$y=\dfrac{1}{2}x-\sin x\quad при\ x\in(0;2\pi)$.

<u>Решение:</u> Д.М.: ∀x∈(0; 2π) и $f'=\dfrac{1}{2}-\cos x$. Уравнението f′ = 0 има решения $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ т.е. $x_1=\dfrac{\pi}{3};\quad x_2=-\dfrac{\pi}{3}$ са критичните точки при x∈(0; 2π). Определяме вида на екстремума: f′′ = sin x. Тогава: $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0;\quad y_{\min}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и



Фиг. 6

$f''\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0;\quad y_{\max}=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Зад. 8: Ако $x=\dfrac{\pi}{3}$, да се определи при кои стойности на параметъра a функцията $y=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ има екстремум и да се определи вида му.

<u>Решение:</u> За да има екстремум, дадената функция трябва първата и производна да е равна на нула в тази точка, т.е
$f'=a\cos x+\dfrac{1}{3}.3\cos 3x=a\cos x+\cos 3x;\quad f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\left(3.\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{a}{2}-1=0\Rightarrow a=2$. За да намерим какъв е екстремума, с така намерената стойност на параметъра заместваме в първата производна f′ = 2cos x + cos 3x и изследваме втората производна: f′′= – 2sin x – 3sin 3x; = $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\pi=-2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0$. Следователно дадената функция при a = 2 има max, като стойността на този максимум е
$y_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\sin\pi=\sqrt{3}$.

VI. Най-голяма и най-малка стойност

Най-голямата (НГС) и най-малка стойност (НМС) на функция в затворен интервал наричаме още абсолютен (глобален) екстремум. Нека при x = c∈[a, b] функцията получава най-малката си стойност, а при x = d∈[a, b] получава най-голямата си стойност. Това се записва: $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(c)$ и $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(d)$. Очевидно е тогава, че имаме неравенството $f(c)\leq f(x)\leq f(d)$ и стойностите, които може да заема функцията принадлежат на интервала [f (c); f (d)].

Нека да имаме функцията y = f(x), която е дефинирана и непрекъсната за всяко x∈[a; b]. В зависимост от вида на интервала са възможни следните случаи:

- Функцията няма локален екстремум в този интервал – Тя е или растяща, или намаляваща
  - Ако интервалът е отворен от двете страни, то функцията няма най-голяма и най-малка стойност;
  - Ако интервалът е затворен, намираме f(a) и f(b). Ако f(a) < f(b), то $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(b);\quad \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(a)$

- Функцията има един локален екстремум в този интервал:
  - Ако този екстремум е max, то той е и най-голямата стойност, т.е. $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = y_{\max}$. Най-малката стойност се определя от интервала: Ако той е отворен, функцията няма НМС, ако той е затворен от двете страни намираме f(a) и f(b). Ако f(a) < f(b), то $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(a)$;
  - Ако този екстремум е min, то той е и най-малката стойност, т.е. $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = y_{\min}$. Най-голямата стойност се определя от интервала: Ако той е отворен, функцията няма НГС, ако той е затворен от двете страни намираме f(a) и f(b). Ако f(a) < f(b), то $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(b)$;
- Функцията има повече от един екстремум в този интервал:
  - Ако интервалът е отворен, то $\max\limits_{x\in(a,\,b)} f(x) = y_{\max}$; $\min\limits_{x\in(a,\,b)} f(x) = y_{\min}$;
  - Ако интервалът е затворен от двете страни, намираме y_{max}, y_{min}, f(a), f(b) и по-голямото от тези числа е НГС, а по-малкото – НМС.

Може да се разгледат следните начини за намиране на НГС и НМС:

Бележка:

Условието на всички следващи задачи е: Намерете най-малката и най-голяма стойност на функциите в зададения интервал.

1. Метод на производните

Зад. 10: $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$ а) $x\in[-1; 1]$; б) $x\in[-1; 3]$.

Решение: а) Намираме първата производна $f' = 9x^2 - 18x$. Намираме критичните точки $9x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow 9x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Второто решение не принадлежи на разглеждания интервал [–1; 1], затова функцията евентуално може да има екстремум при $x_1 = 0$. Намираме вида на този екстремум като изследваме знака на втората производна $f'' = 18x - 18$; $f''(0) = 18.0 - 18 = -18 \Rightarrow f''(0) < 0$ т.е. при $x_1 = 0$ функцията има локален максимум. Намираме стойността на този максимум $y_{max} = f(0) = 3.0 - 9.0 + 2 = 2$. Щом имаме само един локален екстремум, то той е и най-голямата стойност в този интервал, т.е. $\max\limits_{x\in[-1;1]} y = f(0) = 2$. За да намерим НМС, намираме стойността на функцията в краищата на затворения интервал $f(-1) = 3.(-1)^3 - 9.(-1)^2 + 2 = -10$; $f(1) = 3.1^3 - 9.1^2 + 2 = -4 \Rightarrow \min\limits_{x\in[-1;1]} y = f(-1) = -10$

б) $f' = 9x^2 - 18x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. И двете решения принадлежат на интервала [– 1; 3]. Намираме втората производна $f'' = 18x - 18$ и изследваме знака и в двете точки: $f''(0) = 18.0 - 18 = -18 \Rightarrow f''(0) < 0$, т.е. при $x_1 = 0$ функцията има локален максимум. Намираме стойността му $y_{max} = f(0) = 3.0 - 9.0 + 2 = 2$.; $f''(2) = 18.2 - 18 = 18 \Rightarrow f''(2) > 0$, т.е. при $x_1 = 2$ функцията има локален минимум. Намираме стойността на този минимум $y_{min} = f(2) = 3.2^3 - 9.2^2 + 2 = 24 - 36 + 2 = -10$. Намираме стойността на функцията в краищата на интервала $f(-1) = 3.(-1)^3 - 9.(-1)^2 + 2 = -10$; $f(3) = 3.3^3 - 9.3^2 + 2 = 2$. Най-малкото от числата y_{max}, y_{min}, f(–1) и f(3) е НМС, а най-голямото – НГС: $\max\limits_{x\in[-1;1]} y = f(3) = f(0) = 2$; $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = f(-1) = f(2) = -10$

Бележка:

Ако в Зад. 11 изследвахме в отворен интервал отдясно, т.е $x\in[-2; 3)$, то функцията y няма да има най-голяма стойност, тъй като има стойности, произволно близки до 18

Зад. 13: $y = (1 + \cos x)\sin x$; $x\in[0; \pi]$.

Решение: $f' = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Пол. $\cos x = t$; $2t^2 + t - 1 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 0,5$. Тогава:

A) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$. Разглеждаме интервала [0; π] затова $x_1 = \pi$.

B) $\cos x = \frac{1}{2} \to \alpha = \frac{\pi}{3}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Разглеждаме интервала [0; π] затова $x_2 = \frac{\pi}{3}$

$f'' = -4\cos x.\sin x - \sin x$. $f''(\pi) = -4.1.0 - 0 = 0$, т.е. точката $x_1 = \pi$ от графиката на дадената функция е инфлексна и няма екстремум, а графиката само преминава от вдлъбната в изпъкнала (или обратно). Изследваме в другата точка $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = -4.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$ следователно при $x = \frac{\pi}{3}$ функцията има max. $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $f(\pi) = f(0) = 0$. Следователно $\max\limits_{x\in[0;\pi]} y = y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $\min\limits_{x\in[0;\pi]} y = f(0) = 0$

2. Метод на растяща и намаляваща функция

Зад. 15: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-x^2-2}$

<u>Решение:</u> Д.М.: $\forall x$ следователно изследваме функцията y в този интервал. Полагаме $g(x) = 2x - x^2 - 2$. Дадената задача изглежда така: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$. Щом основата е по-малка от 1, то функцията y е намаляваща. Прилагаме <u>Свойство 3 (2)</u> на показателна функция и получаваме $\begin{cases}\max\limits_{\forall x} y=\left(\frac{1}{5}\right)^{\min\limits_{\forall x} g(x)}\\ \min\limits_{\forall x} y=\left(\frac{1}{5}\right)^{\max\limits_{\forall x} g(x)}\end{cases}$. Следователно първо трябва да намерим най-голямата и най-малка стойност на функцията $g(x)$ за $\forall x$. $g' = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. В тази точка функцията $g(x)$ има екстремум. За да определим вида на екстремума, намираме втората производна $g'' = -2 < 0$. Следователно в точката $x = 1$ функцията $g(x)$ има max, като $g_{max} = g(1) = 2.1 - 1^2 - 2 = -1$, тогава

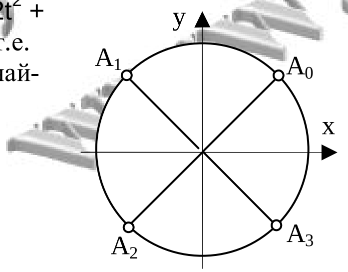
$\min\limits_{\forall x} y=\left(\frac{1}{5}\right)^{\max g(x)}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$. Функцията y няма най-голяма стойност.

3. Метод на субституцията (въвеждане на ново неизвестно)

Зад. 17: $y=\cos 4x+2\sin 2x+3;\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

<u>Решение:</u> Преобразуваме условието с помощта на формула <u>(34) от Тригонометрични формули</u>. $y = 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x + 3 = -2\sin^2 2x + 2\sin 2x + 4$. Полагаме $g(t) = \sin 2x = t$ и получаваме нова функция $f(t) = -2t^2 + 2t + 4$. За да намерим интервала, в който се променя t, т.е. Д.М.$_t$, трябва да изследваме за най-голяма стойност и най-малка стойност на функцията $g(t)$ при $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$:

$g'=2\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi$. Намираме съответните ъгли:



Фиг.7

При $k=0$ *имаме* $(A_0)\to x=\frac{\pi}{4}$; *При* $k=1$ *имаме* $(A_1)\to x=\frac{3\pi}{4}$; и ги нанасяме върху три-

При $k=2$ *имаме* $(A_2)\to x=\frac{5\pi}{4}$; *При* $k=3$ *имаме* $(A_3)\to x=\frac{7\pi}{4}$.

гонометричната окръжност (Фиг. 7). В дадения интервал $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ са само решенията A_0. Определяме екстремума в тази точка

$g''=-4\sin 2x;\quad g''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4.\sin\frac{2\pi}{4}=-4.1<0\Rightarrow g_{\max}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2\pi}{4}=1;\quad g(0)=0;$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\max\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} g=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1;\quad \min\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} g=g(0)=0\quad\Rightarrow t\in[0;1]$

Сега намираме най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(t)$ в интервала $t\in[0; 1]$.

$f'(t)=-4t+2=0\Rightarrow t=\frac{1}{2};\quad f''(t)=-4<0\Rightarrow f_{\max}(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-2.\left(\frac{1}{2}\right)^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)+4=\frac{9}{2}$

$f(0)=-2.0^2+2.0+4=4;\quad f(1)=-2.1^2+2.1+4=4\Rightarrow\max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=f_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2};$

$\min\limits_{t\in[0;1]} f(t)=f(0)=f(1)=4\Rightarrow\max\limits_{x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} y=\max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=\frac{9}{2};\quad\min\limits_{x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)} y=\min\limits_{t\in[0;1]} f(t)=4$

4. Метод на използване апарата на квадратното уравнение

Зад. 18: $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

<u>Решение:</u> Не е даден интервала, в който ще изследваме, затова изследваме в Д.М. на дадената функция. Д.М.$_y$: $x^2 + x + 1 \neq 0$; $D < 0$ следователно изследваме функцията y за $\forall x$. Приемаме y за параметър и търсим за кои стойности на параметъра полученото параметрично уравнение има реални корени. Привеждаме уравнението под общ знаменател и преобразуваме: $y(x^2 + x + 1) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow yx^2 + yx + y - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$. Това уравнение има реални корени ако:

A) $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Тогава $f(x) = 0x^2 + (1 + 1)x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in$ Д.М.$_x$ (което е $\forall x$). Следователно $y = 1$ е решение.

B) $y - 1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$. Тогава $f(x)$ е квадратно уравнение, което има реални корени, ако дискриминантата му е по-голяма или равна на 0, т.е. $D = (y+1)^2 - 4(y-1)(y-1) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 8y - 4 = -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \mid .(-1) \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$ $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Но разглеждаме случая, когато $y \neq 1$, тогава $y \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3]$

От A) и B) следва, че $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right] \Rightarrow \max\limits_{\forall x} y = 3; \quad \min\limits_{\forall x} y = \frac{1}{3}$.

5. Метод на сбор от неотрицателни числа

Определение:

Средно аритметично на две неотрицателни числа $a \geq 0$ и $b \geq 0$ е по-голямо или равно на средно геометричното им, т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (1)

като равенството се постига при $a = b$.
Аналогично неравенство е вярно и за краен брои неотрицателни числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т.е. $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (2)

където равенството се достига при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенствата (1) и (2) се наричат неравенство на Коши. Те могат да се използват за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция, която е сбор от неотрицателни числа. Това става по следните начини:

1) Ако $a \geq 0$ и $b \geq 0$ са променливи неотрицателни числа, но тяхната сума не се променя (т.е. $a + b = k = const$), тогава от (1) следва $\frac{1}{4}(a+b)^2 \geq ab$, т.е произведението $a.b$ има най-голяма стойност $\frac{1}{4}k^2$, която се получава при $a = b$.

2) Ако $a \geq 0$ и $b \geq 0$ са променливи неотрицателни числа, но тяхното произведение не се променя (т.е. $a.b = k = const$), тогава от (1) следва $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$ т.е сумата $a + b$ има най-малка стойност $2\sqrt{k}$, която се получава при $a = b$.

Бележка:

Аналогични на горните разсъждения са в сила и за произволен брои неотрицателни числа.
Произведението $a.b.c$ има най-голяма стойност $\left(\frac{k}{3}\right)^3$ при $a = b = c$.
Сборът на $a+b+c$ има най-малка стойност $3\sqrt[3]{k}$ при $a = b = c$.
Произведението $a.b.c.d$ има най-голяма стойност $\left(\frac{k}{4}\right)^4$ при $a = b = c = d$.
Сборът на $a+b+c+d$ има най-малка стойност $4\sqrt[4]{k}$ при $a = b = c = d$.

Зад. 19: $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1}$

Решение: Д.М.: $\forall x$. Преобразуваме $y = 3^x 3^{-1} + 3^{-x} 3^{-1} = \frac{3^x}{3} + \frac{1}{3.3^x} = \frac{1}{3}\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)$. Полагаме $3^x = t > 0$ и получаваме $y(t) = \frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right)$. Функцията $y(t)$ е сбор от две неотрицателни числа $a = t$ и $b = \frac{1}{t}$. Затова можем да използваме неравенството на Коши (1).

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t.\frac{1}{t}} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{1} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2; \quad y(t) = \frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{2}{3}$. От Определението следва, че най-малката стойност на y е $\frac{2}{3}$ и тя се постига при $a = b$, т.е.

$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t_1 = -1 \notin Д.М._t, \quad t_2 = 1 \in Д.М._t$. Следователно $\min\limits_{\forall x} y = y(1) = \frac{2}{3}$, а няма най-голяма стойност.

Бележка:

Ако при търсенето на абсолютни екстремуми на някаква функция $f(x)$, която е дефинирана в интервала $[a; b]$ с използване на неравенството на Коши, сме получили, че равенството се постига при $x = c \notin [a; b]$, това показва, че първата производна не се анулира в интервала $[a; b]$, т.е. функцията $f(x)$ е или растяща, или намаляваща в този интервал. Тогава най-малката и най-голямата стойност на $f(x)$ се получават в краищата на интервала, т.е. при $x = a$ и $x = b$.

VII. Доказване на неравенства

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Зад. 20: Дадени са функциите $f(x)=2x+3\sqrt[3]{(3-x)^2}-2;\quad g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-18x+25}$.

а) Да се докаже, че g(x)≤4 за всяка реална стойност на x.

б) Да се намери най-голямата и най-малка стойност на f(x) за x∈[1; 4].

в) Да се реши уравнението f(x) = g(x) за x∈[1; 4]. (ЛТУ, 2001)

Решение: а) За да докажем неравенството g(x)≤4, трябва да докажем, че функцията g(x)има най-голяма стойност 4. За целта полагаме $\varphi(x)=3x^2-18x+25$ и получаваме $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi(x)}$. Тази показателна функция е намаляваща (защото основата и е по-малка от 1). От Свойство 3 (2) можем да запишем $\max\limits_{\forall x} g=\left(\frac{1}{2}\right)^{\min\limits_{\forall x}\varphi(x)}$, т.е достатъчно е да намерим най-малката стойност на φ(x). Функцията φ(x) е квадратна и параболата и е с връх надолу (защото коефициента пред най-високата степен на неизвестното е положителен). Знаем, че в такъв случай min е в точка $x=-\frac{b}{2a}$. В нашия случай това е x = 3. Тогава $\varphi_{\min}=\varphi(3)=3.3^2-18.3+25=-2$ т.е. $\min\limits_{\forall x}\varphi=\varphi_{\min}=\varphi(3)=-2$. И сега $\max\limits_{\forall x} g=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$. С това доказахме, че g(x)≤4 за всяка стойност на x.

б) Д.М.: ∀x. Представяме корена като степен и намираме първа производна $f'=2+3.\frac{2}{3}.(3-x)^{\frac{2}{3}-1}.(-1)=2-\frac{2}{\sqrt[3]{3-x}}$. Тази производна не е дефинирана при x = 3 (рогова точка). Това е едната критична точка. Решавайки неравенството f′(x) ≥ 0 обединяваме стъпките за намиране на интервалите, в които функцията расте и точките, в които тя има локален екстремум

$$2-\frac{2}{\sqrt[3]{3-x}}\ge 0\,|.2\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\ge 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{3-x}-1}{\sqrt[3]{3-x}}\ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A)\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{3-x}>0\\ \sqrt[3]{3-x}-1\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}3-x>0\\ \sqrt[3]{3-x}\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x<3\\ 3-x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x<3\\ x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow x\le 2\\ B)\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{3-x}<0\\ \sqrt[3]{3-x}-1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x>3\\ x\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow x>3\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$$

Но ние изследваме в интервала x∈[1; 4], следователно функцията f(x) расте при x∈[1; 2] ∪(3; 4], а при x∈(2; 3) функцията f(x) намалява. Резултатите от това изследване показваме в долната таблица.

	1		2		3		4
f′ (x)		+	0	–	|	+	
f (x)		↗		↘		↗	

От таблицата се вижда, че функцията f(x) има max при x = 2 (при x = 3 няма min защото f′ (x) не е дефинирана). Намираме стойността на функцията в двете критични точки и в краищата на интервала

$f(1)=2.1+3\sqrt[3]{(3-1)^2}-2=3\sqrt[3]{4}$; $f(2)=2.2+3\sqrt[3]{(3-2)^2}-2=5$

$f(3)=2.3+3\sqrt[3]{(3-3)^2}-2=4$; $f(4)=2.4+3\sqrt[3]{(3-4)^2}-2=9$

Тогава $\max\limits_{\forall x} f=f(4)=9;\quad \min\limits_{\forall x} f=f(3)=4$

в) Решаваме уравнението f(x) = g(x) графично. В б) доказахме, че най-малката стойност на f(x) е 4 т.е. f(x) ≥ 4, а в а) доказахме, че най-голямата стойност на g(x) е също 4 т.е. g(x) ≤ 4. Затова можем да запишем g(x) ≤ 4 ≤ f(x) за всяко x. Знаем, че f(x) достига най-малката си стойност 4 при x = 3. Очевидно при x = 3 имаме f(3) = g(3) = 4, а при x ≠ 3 получаваме g(x) < 4 < f(x). Тогава уравнението f(x) = g(x) има едно единствено решение x = 3 .

VIII. Графично решаване на уравнение

Зад. 22: Дадени са функцията $f(x)=x^2+2x+\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}$.

а) Да се реши уравнението $f(x)=\sqrt{7}+\sqrt{14}$. (СУ, 2003)

Решение: а) Уравнението преобразуваме по следния начин $x^2+2x+\sqrt{3(x^2+2x)+7}+\sqrt{5(x^2+2x)+14}=\sqrt{7}+\sqrt{14}$ (A). Полагаме $y = x^2 + 2x$ (B). и получаваме уравнението $y+\sqrt{3y+7}+\sqrt{5y+14}=\sqrt{7}+\sqrt{14}$ (C). Очевидно дясната страна на това уравнение е число, а лявата страна означаваме с $g(y)=y+\sqrt{3y+7}+\sqrt{5y+14}$. За да решим уравнение (C), трябва да намерим точката, в която функцията g(y) се пресича с числото $\sqrt{7}+\sqrt{14}$. Изследваме (B), за да намерим най-малката и най-голямата стойност на y. Намираме y′ = 2x + 2 = 0 ⇒ x = – 1; y′′ = 2 > 0 следователно при x = – 1 имаме min и $y_{\min}$ = y(– 1) = – 1. Сега изследваме функцията g(y) в интервала y∈[– 1; + ∞]: $g'=1+\frac{3}{\sqrt{3y+7}}+\frac{5}{\sqrt{5y+14}}$. Второто и третото число са положителни (защото коренът в знаменателя е винаги положителен). Затова можем да запишем $g' > 0$ за $\forall y$, т.е. функцията $g(y)$ в интервала $y\in[-1; +\infty]$ е само растяща. Следователно уравнение (C) ще има само едно решение. С непосредствена проверка се вижда, че единственото решение е $y = 0$. Заместваме в (B) $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$. Това са и решенията на уравнение (A), т.е. на даденото уравнение.

IX. Определяне броя на корените и разположението им върху числовата ос

В зад. 22 показахме, че ако една функция $f(x)$ е растяща в даден интервал, тя има само един корен. Може да се изведе правило за определяне броя на корените на уравнение $f(x) = 0$.

Правило:

- Разделяме Д.М. на интервали, в които функцията $f(x)$ е монотонна.
- Определяме знака на $f(x)$ в краищата на всеки интервал, в който тя е монотонна. Ако интервалът е отворен, пресмятаме границата в краищата на интервала.
- Определяме броя на корените във всеки от разглежданите интервали:
  - ако знаците в края на интервала са еднакви, в него уравнението няма корени;
  - ако знаците са различни, то уравнението има точно един корен в този интервал.

Зад. 23: Да се определят броят и разположението на корените на уравнението:
а) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 6 = 0$;
б) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7 = 0$

Решение: а) Означаваме лявата страна с функцията $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
1) Разделяме ДМ на интервали, в които $f(x)$ е монотонна, т.е. решаваме уравнението $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$. Тези точки разделят ДМ на интервалите $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$, в които $f'(x)$ има постоянен знак, т.е. $f(x)$ е монотонна.
2) Определяме знака на $f(x)$ в краищата на всеки от горните интервали.

За интервала $(-\infty; 1)$ имаме
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3 - 9x^2 + 12x - 6\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3.\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = -\infty.2 = -\infty$ и $f(1) = 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 - 6 = -1$, следователно в краищата на интервала $(-\infty; 1)$ функцията има еднакви знаци т.е. уравнението $f(x) = 0$ няма корени в този интервал.

За интервала $(1; 2)$ имаме $f(1) = 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 - 6 = -1$ и $f(2) = 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 - 6 = -2$, следователно в краищата на интервала $(1; 2)$ функцията има еднакви знаци т.е. уравнението $f(x) = 0$ няма корени в този интервал.

За интервала $(2; +\infty)$ имаме $f(2) = -2$ и
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3 - 9x^2 + 12x - 6\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3.\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = \infty.2 = \infty$, следователно в краищата на интервала $(2; +\infty)$ функцията има различни знаци, т.е. уравнението $f(x) = 0$ има точно един корен в този интервал.

Окончателно получаваме, че уравнението $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6 = 0$ има един корен x_0. Можем да определим дори между кои цели числа е този корен. Знаем, че $f(2) = -2 < 0$. Намираме $f(3) = 3 > 0$. Затова корена на даденото уравнение се намира между числата 2 и 3 т.е. $2 < x_0 < 3$.

б) Означаваме лявата страна с функцията $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7$
1) Намираме първата производна $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 2(2x^3 - 9x^2 + 12x - 6) = 0$. Не можем директно да решим това уравнение. Затова израза в скобите означаваме с функцията $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$. Тогава можем да запишем $f'(x) = 2g(x) = 0$. В а) доказахме, че функцията $g(x)$ има един корен, следователно уравнението $f'(x) = 2g(x) = 0$ ще има само един корен. Нека този корен да означим с x_0. Щом производната $f'(x)$ се нулира при x_0, то в интервалите $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$ функцията $f(x)$ е монотонна.
2) Определяме какъв е знакът на функцията $f(x)$ в краищата на всеки интервал
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 7\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4.\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{12}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right) = +\infty.1 = +\infty$. Знаем от а), че корена x_0 се намира между $2<x_0<3$. Затова намираме $f(2) = 2^4 - 6.2^3 + 12.2^2 - 12.2 + 7 = -1 < 0$ и $f(3) = 3^4 - 6.3^3 + 12.3^2 - 12.3 + 7 = -2 < 0$, т.е. показахме, че в краищата на двата интервала $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$ функцията $f(x)$ има различни знаци. Затова даденото уравнение има по едно решение във всеки интервал, т.е. уравнението има два корена $x_1\in(-\infty; x_0)$ и $x_2\in(x_0; +\infty)$. Можем да определим дори между кои цели числа са тези корени, като изчислим $f(1) = 2$, $f(2) = -1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 23$. Тогава записваме $x_1\in(1; 2)$ и $x_2\in(3; 4)$.

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".