

## Квадратни уравнения и неравенства.

### I. Квадратно уравнение

$$\text{Уравнение от вида: } ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

където  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  са реални коефициенти, се нарича квадратно уравнение.

Ако коефициентът  $a$  е равен на 0, уравнението (1) се превръща в линейно, т.е при  $a = 0$  (1) има един корен.

При  $a \neq 0$ , израза  $D = b^2 - 4ac$  се нарича дискриминанта. Решенията на уравнение (1) се намират по формулата:  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ . Ако  $b$  е четно число, означаваме  $k = \frac{b}{2}$  и дискриминантата има вида  $D_1 = k^2 - ac$ . В този случай използваме съкратената формула:  $x_{1/2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$  (2)

Квадратният тричлен може да се разложи на множители по следната формула:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (3)$$

където  $x_1$  и  $x_2$  са корени на уравнението (1).

Ако уравнение (1) има реални корени  $x_1$  и  $x_2$ , то за тях са в сила формулите

$$\text{на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (4)$$

Условията за съществуване на реални корени на уравнение (1) и определящи знаците им са следните:

$$\blacklozenge \text{ Уравнението ИМА реални корени, ако: } \begin{cases} a \neq 0 \\ D \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\blacklozenge \text{ Уравнението ИМА реални различни корени, ако: } \begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\blacklozenge \text{ Уравнението НЯМА реални корени, ако: } \begin{cases} a \neq 0 \\ D < 0 \end{cases} \quad (7)$$

◆ Уравнението ИМА положителни корени (може и да са еднакви), т.е.

$$\text{Ако } x_1 \text{ и } x_2 > 0, \text{ то } \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \quad (8)$$

◆ Уравнението ИМА два различни положителни корени, т.е.

$$\text{Ако } x_1 \neq x_2 > 0, \text{ то } \begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \quad (9)$$

◆ Уравнението ИМА отрицателни корени (може и да са еднакви), т.е.

$$\text{Ако } x_1 \text{ и } x_2 < 0, \text{ то } \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \quad (10)$$

◆ Уравнението ИМА два различни отрицателни корени, т.е.

$$\text{Ако } x_1 \neq x_2 < 0, \text{ то } \begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \quad (11)$$

◆ Уравнението ИМА един положителен и един отрицателен корен, т.е.

$$\text{Ако } x_1 < 0 \text{ и } x_2 > 0 \text{ (или } x_1 > 0 \text{ и } x_2 < 0), \text{ то: } x_1 \cdot x_2 < 0 \quad (12)$$

#### Бележка 1

В (12)  $D > 0$  е излишно условие, защото от  $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac > 0$

◆ Уравнението ИМА корени с различни знаци, като отрицателният е по-голям от положителния по абсолютна стойност, т.е.

Ако  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$  (или  $x_1 < 0$  и  $x_2 > 0$ ) и  $|x_1| < |x_2|$  (или  $|x_1| > |x_2|$ ), то

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \quad (13)$$

#### Бележка

Изразите  $x_1 + x_2$  и  $x_1 \cdot x_2$  в (8) до (13) се изчисляват с формулите на Виет.

- ◆ Уравнението има един двукратен реален корен: 
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Квадратните уравнения се решават с помощта на формула (2) или по алгебричен начин. Алгебричният метод е следният: Квадратната функция (лявата страна на уравнението) се разлага на множители с помощта на (3). Нека  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  и тогава имаме уравнението  $(x - a)(x - b) = 0$ . То се разпада на двете уравнения:  $x - a = 0$  и  $x - b = 0$ , които са линейни и се решават като такива.

( $\max f(x)$ ), която приема при  $x = -\frac{b}{2a}$ , но няма най-малка стойност.

- ◆ Свойство 4 – Как се изменя знакът на квадратната функция  $f(x)$  в зависимост от  $D$  и  $a$  се вижда от Таблица №1:

Таблица №1			
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

## II. Квадратна функция

Нека лявата страна на (1) положим  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ , (15)

Функцията  $y$  се нарича квадратна с аргумент (независима променлива)  $x$ . В общия случай квадратната функция има Д.М.:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

Квадратната функция има следните свойства:

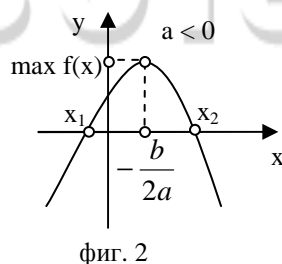
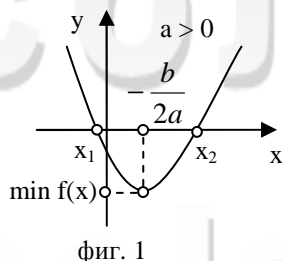
- ◆ СВОЙСТВО 1 – Графиката на квадратната функция е парабола. Ако коефициентът  $a > 0$ , параболата е с върха надолу (Фиг. 1). Ако коефициентът  $a < 0$ , параболата е с върха нагоре (Фиг. 2).

- ◆ СВОЙСТВО 2 – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при  $a > 0$  функцията (15) е намаляваща в интервала  $(-\infty; -\frac{b}{2a})$  и

растяща в интервала  $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ . При

$a < 0$  функцията (15) е растяща в интервала  $(-\infty; -\frac{b}{2a})$  и намаляваща в интервала  $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ .

- ◆ СВОЙСТВО 3 – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при  $a > 0$  функцията (15) има най-малка стойност ( $\min f(x)$ ), която приема при  $x = -\frac{b}{2a}$ , но няма най-голяма стойност. При  $a < 0$  функцията (15) има най-голяма стойност



## III. Неравенства:

### 1) Квадратно неравенство

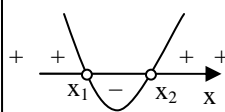
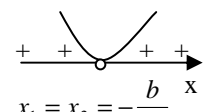
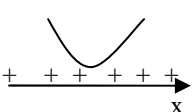
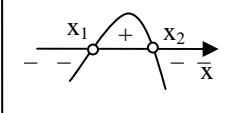
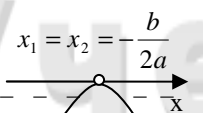

Неравенство при което от дясната страна имаме нула, а отляво – квадратна функция се нарича квадратно т.е.  $ax^2 + bx + c > 0$  (16)

То се решава по следните начини:

#### I начин (графичен):

1. Намираме корените на квадратния тричлен. Например те са  $x_1$  и  $x_2$ , като  $x_1 < x_2$ .
2. Решенията на (16) определяме от следната таблица:

**Таблица №2**

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (17)	 $\forall x \neq x_1$ (18)	 $\forall x$ (19)
$a < 0$	 $x \in (x_1; x_2)$ (20)	 $x \in \emptyset$ (21)	 $x \in \emptyset$ (22)

За да можем да приложим Таблица № 2 за неравенството  $ax^2 + bx + c < 0$ , то умножаваме двете му страни с "– 1".

**Бележка 2**

За да не умножаваме всеки път с "– 1", можем да определим знака на  $a$  по следния начин:

- $a > 0$ , ако знакът пред  $x^2$  и знакът на неравенството съвпадат;
- $a < 0$ , ако знакът пред  $x^2$  и знакът на неравенството са различни

**II начин (метод на интервалите):**

1. Намираме корените на квадратния тричлен от (16) Например те са  $x_1$  и  $x_2$ , като  $x_1 < x_2$  и го разлагаме на множители използвайки (3).

**Бележка**

След като разложим на множители можем да продължим да решаваме неравенството по алгебричен метод.

Алгебричният метод зависи от вида на неравенството. Например:

- Ако имаме неравенството  $(a-b)(c-d) > 0$ , то решаваме системите:

$$\begin{cases} a-b > 0 \\ c-d > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-b < 0 \\ c-d < 0 \end{cases} \quad (23)$$

- Ако имаме неравенството  $(a-b)(c-d) < 0$ , то решаваме системите:

$$\begin{cases} a-b > 0 \\ c-d < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-b < 0 \\ c-d > 0 \end{cases} \quad (24)$$

2. Нанасяме тези корени върху числовата ос, т.е. нахвърляме ДМ на подинтервали;
3. Определяме знака на най-десния интервал, като преброяваме колко минуса има пред неизвестното, и ако те са четен брой, записваме "+", ако те са нечетен брой – записваме "–";
4. Определяме знаците на следващите подинтервали, редувайки ги алтернативно отдясно наляво;
5. Решенията на неравенството са тези интервали, които отговарят на знака на неравенството.

**2) Дробни (рационални) неравенства**

Те са от вида:  $\frac{F(x)}{G(x)} \geq 0$  (25)

(Дробните неравенства могат да имат всеки друг знак за неравенство). Те се решават по следния начин:

1. Определяме Д.М.;
2. Преобразуваме неравенството (без да привеждаме двете му страни под общ знаменател) до основното неравенство (25);
3. Разлагаме  $F(x)$  и  $G(x)$  на множители

**Бележка**

Неравенство (25) може да се запише във вида  $F(x) \cdot G(x) \geq 0$ , (26) ако  $G(x) \neq 0$ . Затова неравенства (25) и (26) са напълно еквивалентни, само когато  $G(x) \neq 0$ .

4. Прилагаме Методът на интервалите.

**Бележка**

Може да не търсим ДМ, ако при нахъсването на числовата ос на подинтервали отчетем, че знаменателят на дробта не може да е 0.

**3) Сложни неравенства**

Такива неравенства имаме тогава, когато от едната страна на неравенството имаме произведение от няколко двучлена (виж Зад.2). Те се решават по следния начин:

1. Проверяваме дали има двучлени, които са изпълнени за всяко  $x$ , като те отпадат при нанасянето на числовата ос. Обикновено това са изрази от вида:  $(x^2 + a) \Rightarrow \forall x$  или  $(x + a)^2 \Rightarrow \forall x \neq a$ .
2. Прилагаме метода на интервалите.

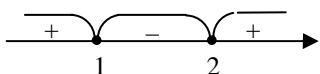
Зад. 1:  $x^2 - 3x + 2 < 0$

Решение: От (2) намираме корените на квадратния тричлен:

$$D = 3^2 - 8 = 9 - 8 = 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{D} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

I начин – Ще приложим графичния начин. Коефициентът пред  $x^2$  и неравенството имат различни знаци. За да използваме Таблица №2 няма да умножаваме с "–1", а от Бележка 2 определяме, че  $a < 0$ , т.е имаме случая (20). Затова решенията са  $x \in (1; 2)$

II начин – Ще приложим метода на интервалите. Нанасяме  $x_1$  и  $x_2$  на числовата ос и понеже няма минуси пред неизвестното получаваме

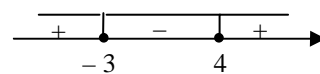


. Решенията са  $x \in (1; 2)$

Зад. 2:  $(3x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 3)(x - 4) \leq 0$

Решение: От  $3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x$   
 $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \Rightarrow$  даденото неравенство е:  $(x + 3)(x - 4) \leq 0$ .

Решаваме го по метода на интервалите:



. Решенията са  $x \in [-3; 4]$

**4. Биквадратни уравнения**

Биквадратните уравнения имат вида  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , (27) където  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  са реални коефициенти.

Биквадратните уравнения се решават чрез полагането  $x^2 = y$  и решаваме съответното квадратно уравнение  $ay^2 + by + c = 0$ . Ако това последно уравнение има корени  $y_1$  и  $y_2$ , то следва, че

$$x^2 = y_1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{y_1} \quad \text{и} \quad x^2 = y_2 \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm \sqrt{y_2}$$

Броят на корените на биквадратното уравнение се определят от таблица №3

Таблица № 3

Корени на уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$	Корени на $ay^2 + by + c = 0$	Условия
Четири различни реални $x_{1/2} \neq x_{3/4}$	$y_1 > 0$ и $y_2 > 0$	$D > 0$ $y_1 + y_2 > 0$ $y_1 \cdot y_2 > 0$ (28)
Четири реални корени, които са два по два равни $x_1 = x_3; x_2 = x_4$	$y_1 = y_2 > 0$	$D = 0$ $y_1 = y_2 = -\frac{b}{2a}$ (29)
Четири равни реални $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$	$y_1 = y_2 = 0$	$D = 0$ $a \neq 0$ $b = c = 0$ (30)
Три реални, като $x_{1/2} \neq 0; x_3 = x_4 = 0$	$y_1 > 0$ и $y_2 = 0$	$y_1 = -\frac{b}{a} > 0$ $y_2 = c = 0$ (31)

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

Два различни реални $x_{1/2} \neq 0$	$y_1 > 0$ и $y_2 < 0$	$a=0$ $y = -\frac{c}{b} > 0$ $\cup$ $a \neq 0$ $y_1, y_2 < 0$	(32)
Два равни реални $x_1 = x_2 = 0$	$y_1 = 0$ и $y_2 < 0$	$y_1 = c = 0$ $y_2 = -\frac{b}{a} < 0$	(33)
Няма реални	$y_1 \in \emptyset$ и $y_2 \in \emptyset$	$D < 0$	(34)
	$y_1 < 0$ и $y_2 < 0$	$D > 0$ $y_1 + y_2 < 0$ $y_1 \cdot y_2 > 0$	

### 5. Уравнения от по-висока степен с цели коефициенти

Общият вид на уравнение от  $n$ -та степен с цели коефициенти е  
 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ , където  $a_0 \neq 0$  (35)

В това уравнение, ако  $a_0 = 1$ , тогава то добива вида  
 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ , (36)

Целите рационални корени на уравнение (36) са числа делители на свободния член  $a_n$ . Проверката кои от делителите на свободния член  $a_n$  са корени на уравнение (36), се извършва с правилото на Хорнер за делене на многочлен на двучлен.

#### Правило:

Нека да предположим, че коренът на уравнение (36) е  $b$ . Тогава можем да разделим многочлена вдясно на (36) с двучлена  $(x - b)$  и се получава:  
 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x-b)(c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \dots + c_{n-1}) + \Gamma$  (37)  
 Намирането на коефициентите  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  и числото  $\Gamma$  става по таблицата 3:

Таблица №3

	$a_0=1$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
$b$	$c_0=a_0$	$c_1=a_1+bc_0$	$c_2=a_2+bc_1$	...	$c_{n-1}=a_{n-1}+bc_{n-2}$	$\Gamma=a_n+bc_{n-1}$

Ако  $\Gamma = 0$ , деленето се извършва без остатък.

Например: Да се раздели многочлена  $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$  на  $x - 2$  т.е.  $b = 2$ .

	1	-3	2	4	-3	2	-1	5
2	1	$-3+2 \cdot 1 = -1$	$2+2 \cdot (-1) = 0$	$4+2 \cdot 0 = 4$	$-3+2 \cdot 4 = 5$	$2+2 \cdot 5 = 12$	23	51

И така  $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = (x-2)(x^6 - x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23) + 51$ , където  $\Gamma = 51$ .

Зад. 3: Да се намерят целите реални корени на уравнението  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

**Решение:** Делителите на свободния член са  $\pm 1; \pm 2$ . По правилото на Хорнер (Таблица №3) намираме кой от тях може да бъде решение на даденото уравнение.

	1	2	-1	-2
1	1	3	2	0

Щом  $\Gamma = 0$  числото  $x = 1$  е точен корен. Следващите делители не ги проверяваме (за ускоряване на процеса за намирането на корените), а записваме дадения многочлен като произведение от двучлен и квадратна функция

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$ . За намиране корените на квадратната функция използваме (2):  $D = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1; x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$ ,

т.е. даденото уравнение има три решения:  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$ .

Ако в уравнение (35)  $a_0 \neq 0$ , не може да приложим правилото разгледано за уравнение (36). Затова преобразуваме уравнение (35) като умножим двете му страни с  $a_0^{n-1}$  и полагаме  $a_0x = y$ . Полученото уравнение  $y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \dots + b_{n-1}y + b_n = 0$  е с цели коефициенти и с коефициент пред най-високата степен  $b_0 = 1$ . Върху това уравнение прилагаме схемата на Хорнер.

### 6. Параметрични уравнения и неравенства

#### Основни типове задачи:

Зад. 4: Да се намерят стойностите на реалния параметър  $m$ , за които уравнението  $(m - 2)x^2 - 2(2m + 1)x + 2m + 1 = 0$ :

- а) няма реални корени.
- б) има реални корени.
- в) има два положителни корена изпълняващи неравенството  $x_1 + x_2 > \sqrt{2}$ .
- г) има два отрицателни реални корени;
- д) има два реални корени с различни знаци;
- е) има двукратен реален корен.

**Решение:** а) Използваме (7):

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ D < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$$

т.е. при  $m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$  даденото уравнение няма корени.

б) Използваме (5):

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \text{ т.е. при}$$

$m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$  уравнението има реални корени

в) Използваме (8) като включим и даденото условие:

$$\left. \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) \geq 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-2} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{(4-\sqrt{2})m+2+2\sqrt{2}}{m-2} > 0 \\ \frac{2m+1}{m-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty) \Rightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$$

$m \in (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$

г) Използваме (10) и формулите на Виет (4):

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) \geq 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-2} < 0 \\ \frac{2m+1}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty) \\ m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \\ m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset \text{ т.е. няма стой-}$$

ности на параметъра, при които корените на даденото уравнение да са отрицателни.

д) Използваме (12):

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \frac{2m+1}{m-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$$

е) Използваме (14):

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}; m_2 = -3$$

Зад. 5: Дадено е уравнението  $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 2m - 2 = 0$ , където  $m$  е реален параметър.

а) Докажете, че за всяка стойност на  $m$ , уравнението има корени с различни знаци.

б) Намерете стойностите на  $m$ , за които разликата на корените на даденото уравнение е равна на 6 (ТУВ, 2000)

**Решение:** а) Решението на това условие става на две стъпки:

А) Първо трябва да докажем, че даденото уравнение има реални корени. За целта проверяваме дали е изпълнено (6):  $D = (m+1)^2 + (m^2 + 2m + 2) = m^2 + 2m + 1 + m^2 + 2m + 2 = 2m^2 + 4m + 3 > 0$ . Това неравенство е изпълнено за  $\forall m$ , защото дискриминантата му е  $D_1 = 4 - 6 < 0$  и от (19) следва  $\forall m$ , т.е. даденото уравнение има два различни корени. Нека да ги означим с  $x_1$  и  $x_2$ .

В) Проверяваме при кои стойности на  $m$  двата корена са с различни знаци. От формулите на Виет знаем, че корените са с различни знаци, когато е изпълнено (12):  $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow -m^2 - 2m - 2 < 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 2 > 0$ ;  $D = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \forall m$  т.е. корените имат различни знаци.

От А) и В) следва, че даденото уравнение има два различни корена с различни знаци при  $\forall m$ .

б) В а) доказахме, че даденото уравнение има корени  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$ . По условие имаме изпълнено  $x_1 - x_2 = 6$ . Това равенство преобразуваме така, че в лявата му страна да имаме сбор или произведение от двата корена (за да приложим формулите на Виет). За целта повдигаме на квадрат двете му страни  $(x_1 - x_2)^2 = 36 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 36$ . Прибавяме и изваждаме от лявата страна  $2x_1x_2$ :  $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 36 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 36$  и сега използваме формулите на Виет (4):  $4(m+1)^2 + 4(m^2 + 2m + 2) = 36 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$ ;  $D = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2$ ;  $m_1 = -1 + 2 = 1$ ;  $m_2 = -1 - 2 = -3$  т.е. при  $m_1 = 1$  и  $m_2 = -3$  разликата от корените на даденото уравнение е равна на 6.

Зад. 6: Дадено е квадратното уравнение  $x^2 - 5x + m = 0$ , където  $m$  е реален параметър.

а) За кои стойности на  $m$  уравнението има два реални корени  $x_1$  и  $x_2$ , за които е изпълнено  $x_1^2 + x_2^2 = 13$ ?

б) За кои стойности на  $m$  уравнението има два реални корени  $x_1$  и  $x_2$ , за

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

които е изпълнено  $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} > 0$ ?

(ТУГ, 2000)

**Решение:** а) Даденото уравнение, за да има два реални корена трябва да е изпълнено (5):  $D = 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$ . От формулите на Виет (4) имаме  $x_1 + x_2 = 5$ ;

$x_1 x_2 = m$ . Преобразуваме даденото уравнение като прибавим и извадим от лявата му страна  $2x_1 x_2$  и получаваме  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow 5^2 - 2m = 13 \Leftrightarrow m = 6 \in \left(-\infty; \frac{25}{4}\right]$ . Следователно при  $m = 6$  дадено-

то уравнение има два реални корена, изпълняващи даденото условие.

б) Преобразуваме даденото неравенство така, че в него да се съдържат само сбор и произведение от двата корена и използваме формулите на Виет (4):

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1 x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2)}{x_1 x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]}{x_1 x_2} > 0. \text{ Но } x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = m \Rightarrow \frac{5(5^2 - 3m)}{m} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{25}{3}\right) \left. \vphantom{\frac{5(5^2 - 3m)}{m} > 0} \right\} \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{25}{4}\right)$$

Но  $D = 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$

Следователно даденото уравнение има решения изпълняващи даденото неравенство при  $m \in \left(0; \frac{25}{4}\right)$

Зад. 7: За кои стойности на реалния параметър  $m$  неравенството  $f(x) = (2-m)x^2 - 2mx + 1 < 0$ .

- а) Има решение за  $\forall x$ .
- б) Няма решение.
- в) Има решение извън корените на  $f(x) = 0$ .
- г) Има решение между корените на  $f(x) = 0$ .
- д) Има решение  $\forall x$  без двойния корен на  $f(x) = 0$ .

**Решение:** а) От (19) знаем, че неравенство има решение за  $\forall x$ , ако знакът на коефициента пред  $x^2$  и знакът на неравенството съвпадат, и  $D < 0$ . За нашия слу-

чай това е системата  $\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \in (-2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$  т.е. няма

стойности на  $m$  при които даденото неравенство да има решение за  $\forall x$ .

б) В този случай използваме (21) и (22) (за  $a=2-m>0$  виж Бележката 2).

$\begin{cases} 2-m > 0 \\ m^2 - (2-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 + m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \in [-2; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 1]$  т.е. при  $m \in [-2; 1]$  даденото неравенство няма решение.

в) Ако корените на  $f(x)$  отбележим с  $x_1$  и  $x_2$ , то исканото условие е (17) (за  $a = 2 - m < 0$  виж Бележката 2):

$\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty)$ . Това е и решението на задачата.

г) Ако корените на  $f(x)$  отбележим с  $x_1$  и  $x_2$ , то исканото решение е  $x \in (x_1; x_2)$ . Това условие е изпълнено при (20) (за  $a = 2 - m > 0$  виж Бележката 2):

$\begin{cases} 2-m > 0 \\ m^2 - (2-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$ . Това е и решението на задачата.

д) Нека корените на  $f(x)$  отбележим с  $x_1$  и  $x_2$ , то исканото решение е  $\forall x \neq x_1 = x_2$ . Това условие е изпълнено при (18):

$\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m_1 = -2; m_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$ . Това е и решението на задачата.

Зад. 8: За кои стойности на реалния параметър  $m$  уравнението  $(m-1)x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$  има: (m

- а) четири реални корена.
- б) два реални корена.
- в) няма реални корени.

**Решение:** Даденото уравнение е биквадратно, затова полагаме  $x^2 = y$  и получаваме квадратното уравнение  $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$  (С).

а) Даденото уравнение за да има четири корена (може и да са равни), то уравнение (С) трябва да има два положителни корена (може и да са равни). От (28) следва

## Учебен център „СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

### Задачи за упражнение:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_1 \cdot y_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (m-1)(m+2) \geq 0 \\ \frac{4}{2(m-1)} \geq 0 \\ \frac{m+2}{m-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 \leq 0 \\ m - 1 > 0 \\ (m+2)(m-1) \geq 0, \text{ при } m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-3; 2] \\ m > 1 \\ m \in (-\infty; -2] \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$m \in (1; 2]$  т.е. при  $m \in (1; 2]$  даденото уравнение има четири реални корена.

б) Даденото уравнение за да има два корена (може и да са равни), то уравнение (С) трябва да има при  $a=0$  корен  $y > 0$  и при  $a \neq 0$  корени  $y_1 \geq 0$  и  $y_2 < 0$ . От (32) и (33) следват два случая:

А) Когато  $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ , тогава уравнение (С) има един корен и той трябва да е положителен. За да проверим какъв е знакът на корена, заместваме  $m = 1$  в (С):  $0 \cdot y^2 - 4y + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} > 0$ , т.е.  $m = 1$  е решение на задачата.

В) Когато  $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ , тогава единият корен на (С) е отрицателен (например  $y_2 < 0$ ) а другият положителен или нула:  $y_1 \cdot y_2 \leq 0$ . От формулите на Виет получаваме  $\frac{m+2}{m-1} \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-1) \leq 0, \text{ при } m \neq 1 \Leftrightarrow m \in [-2; 1)$

От А) и В) следва, че при  $m \in [-2; 1]$  даденото уравнение има два реални корена.

в) Биквадратното уравнение няма реални корена, ако за уравнение (С) са изпълнени (34). Затова разглеждаме следните два случая:

А) Уравнение (С) няма решение, а това е при  $D < 0$ :  $4 - (m+2)(m-1) < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ .

В) Уравнение (С) има два отрицателни корена:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 \leq 0 \\ \frac{4}{2(m-1)} < 0 \\ \frac{m+2}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-3; 2] \\ m < 1 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-3; -2)$$

От А) и В) следва, че при  $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$  биквадратното уравнение няма реални корени.

Следват 47 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) раздел „За нас”.