Учебен център "СОЛЕМА"
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Квадратни уравнения и неравенства.

I. Квадратно уравнение

Уравнение от вида: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)
където $a \neq 0$, b и c са реални коефициенти, се нарича квадратно уравнение.

Ако коефициентът a е равен на 0, уравнението (1) се превръща в линейно, т.е при $a = 0$ (1) има един корен.

При $a \neq 0$, израза $D = b^2 - 4ac$ се нарича дискриминанта. Решенията на уравнение (1) се намират по формулата: $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Ако b е четно число, означаваме $k = \dfrac{b}{2}$ и дискриминантата има вида $D_1 = k^2 - ac$. В този случай използваме съкратената формула: $x_{1/2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$ (2)

Квадратният тричлен може да се разложи на множители по следната формула:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, (3)
където x_1 и x_2 са корени на уравнението (1).

Ако уравнение (1) има реални корени x_1 и x_2, то за тях са в сила формулите на Виет: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$ (4)

Условията за съществуване на реални корени на уравнение (1).и определящи знаците им са следните:

- Уравнението ИМА реални корени, ако: $\left|\begin{array}{l} a \neq 0 \\ D \geq 0 \end{array}\right.$ (5)
- Уравнението ИМА реални различни корени, ако: $\left|\begin{array}{l} a \neq 0 \\ D > 0 \end{array}\right.$ (6)
- Уравнението НЯМА реални корени, ако: $\left|\begin{array}{l} a \neq 0 \\ D < 0 \end{array}\right.$ (7)
- Уравнението ИМА положителни корени (може и да са еднакви), т.е.

Ако x_1 и $x_2 > 0$, то $\left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{array}\right.$ (8)

- Уравнението ИМА два <u>различни</u> положителни корени, т.е.

Ако $x_1 \neq x_2 > 0$, то $\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{array}\right.$ (9)

- Уравнението ИМА отрицателни корени (може и да са еднакви), т.е.

Ако x_1 и $x_2 < 0$, то $\left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{array}\right.$ (10)

- Уравнението ИМА два <u>различни</u> отрицателни корени, т.е.

Ако $x_1 \neq x_2 < 0$, то $\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{array}\right.$ (11)

- Уравнението ИМА един положителен и един отрицателен корен, т.е.

Ако $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$ (или $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$), то: $x_1.x_2 < 0$ (12)

Бележка 1

В (12) $D > 0$ е излишно условие, защото от $x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow a.c < 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac > 0$

- Уравнението ИМА корени с различни знаци, като отрицателният е по-голям от положителния по абсолютна стойност, т.е.

Ако $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ (или $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$) и $|x_1| < |x_2|$ (или $|x_1| > |x_2|$, то

$\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ x_1.x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{array}\right.$ (13)

Бележка

Изразите x_1+x_2 и $x_1.x_2$ в (8) до (13) се изчисляват с формулите на Виет.

♦ Уравнението има един двукратен реален корен: $\left| \begin{array}{l} a \neq 0 \\ D = 0 \end{array} \right.$ (14)

Квадратните уравнения се решават с помощта на формула (2) или по алгебричен начин. Алгебричният метод е следният: Квадратната функция (лявата страна на уравнението) се разлага на множители с помощта на (3). Нека $x_1 = a$, $x_2 = b$ и тогава имаме уравнението $(x – a)(x – b) = 0$. То се разпада на двете уравнения: $x – a = 0$ и $x – b = 0$, които са линейни и се решават като такива.

II. Квадратна функция

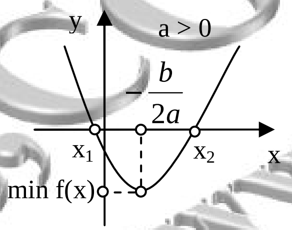
Нека лявата страна на (1) положим $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, (15)

Функцията y се нарича квадратна с аргумент (независима променлива) x. В общия случай квадратната функция има Д.М.: $x \in (-\infty; +\infty)$.

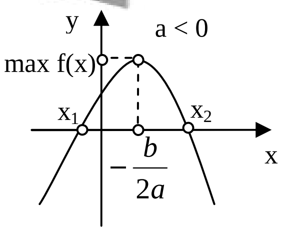
Квадратната функция има следните свойства:

♦ Свойство 1 – Графиката на квадратната функция е парабола. Ако коефициентът $a > 0$, параболата е с върха надолу (Фиг. 1). Ако коефициентът $a < 0$, параболата е с върха нагоре (Фиг. 2).

♦ Свойство 2 – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при $a > 0$ функцията (15) е намаляваща в интервала $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ и растяща в интервала $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. При $a < 0$ функцията (15) е растяща в интервала $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ и намаляваща в интервала $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.



фиг. 1

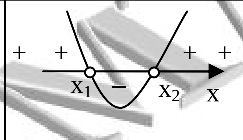
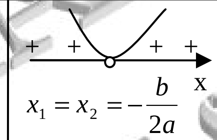
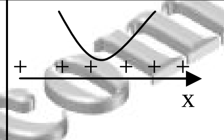
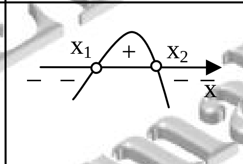
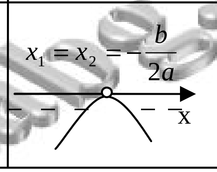
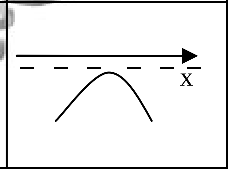


фиг. 2

♦ Свойство 3 – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при $a > 0$ функцията (15) има най-малка стойност (min f(x)), която приема при $x = -\frac{b}{2a}$, но няма най-голяма стойност. При $a < 0$ функцията (15) има най-голяма стойност (maxf(x)), която приема при $x = -\frac{b}{2a}$, но няма най-малка стойност.

♦ Свойство 4 – Как се изменя знакът на квадратната функция $f(x)$ в зависимост от D и a се вижда от Таблица №1:

Таблица №1

	D > 0	D = 0	D < 0
a > 0	 $+ \; + \; x_1 \; - \; x_2 \; + \; +$ x	 $+ \; + \; + \; +$ x $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	 $+ \; + \; + \; + \; + \; +$ x
a < 0	 $x_1 \; + \; x_2$ $- \; - \; - \; -$ x	 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ $- \; - \; - \; -$ x	 $- \; - \; - \; - \; -$ x

III. Неравенства:

1) Квадратно неравенство

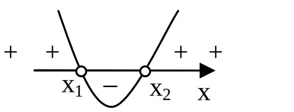
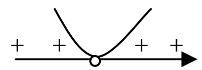
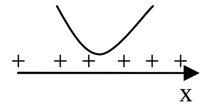
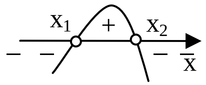
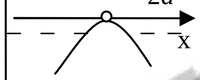
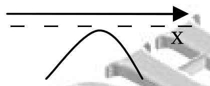
Неравенство при което от дясната страна имаме нула, а отляво – квадратна функция се нарича квадратно т.е. $ax^2 + bx + c > 0$ (16)

То се решава по следните начини:

I начин (графичен):

1. Намираме корените на квадратния тричлен. Например те са x_1 и x_2, като $x_1 < x_2$.
2. Решенията на (16) определяме от следната таблица:

Таблица №2

	D > 0	D = 0	D < 0
a > 0	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (17)	 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ $\forall x \neq x_1$ (18)	 $\forall x$ (19)
a < 0	 $x \in (x_1; x_2)$ (20)	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  $x \in \varnothing$ (21)	 $x \in \varnothing$ (22)

За да можем да приложим Таблица № 2 за неравенството $ax^2 + bx + c < 0$, то умножаваме двете му страни с "– 1".

Бележка 2

За да не умножаваме всеки път с "– 1", можем да определим знака на a по следния начин:

$a > 0$, ако знакът пред x^2 и знакът на неравенството съвпадат;
$a < 0$, ако знакът пред x^2 и знакът на неравенството са различни

II начин (метод на интервалите):

1. Намираме корените на квадратния тричлен от (16) Например те са x_1 и x_2, като $x_1 < x_2$ и го разлагаме на множители използвайки (3).

Бележка

След като разложим на множители можем да продължим да решаваме неравенството по алгебричен метод.
Алгебричният метод зависи от вида на неравенството. Например:

- Ако имаме неравенството $(a-b)(c-d) > 0$, то решаваме системите:

$$\begin{vmatrix} a-b > 0 \\ c-d > 0 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} a-b < 0 \\ c-d < 0 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

- Ако имаме неравенството $(a-b)(c-d) < 0$, то решаваме системите:

$$\begin{vmatrix} a-b > 0 \\ c-d < 0 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} a-b < 0 \\ c-d > 0 \end{vmatrix} \qquad (24)$$

2. Нанасяме тези корени върху числовата ос, т.е. накъсваме ДМ на подинтервали;
3. Определяме знака на най-десния интервал, като преброяваме колко минуса има пред неизвестното, и ако те са четен брой, записваме "+", ако те са нечетен брой – записваме "– ";
4. Определяме знаците на следващите подинтервали, редувайки ги алтернативно отдясно наляво;
5. Решенията на неравенството са тези интервали, които отговарят на знака на неравенството.

2) Дробни (рационални) неравенства

Те са от вида: $\frac{F(x)}{G(x)} \geq 0$ (25)

(Дробните неравенства могат да имат всеки други знак за неравенство). Те се решават по следния начин:

1. Определяме Д.М.;
2. Преобразуваме неравенството (без да привеждаме двете му страни под общ знаменател) до основното неравенство (25);
3. Разлагаме $F(x)$ и $G(x)$ на множители

Бележка

Неравенство (25) може да се запише във вида F(x).G(x) ≥ 0, (26)
ако G(x) ≠ 0. Затова неравенства (25) и (26) са напълно еквивалентни, само когато G(x) ≠ 0.

4. Прилагаме Методът на интервалите.

Бележка

Може да не търсим ДМ, ако при накъсването на числовата ос на подинтервали отчетем, че знаменателят на дробта неможе да е 0.

3) Сложни неравенства

Такива неравенства имаме тогава, когато от едната страна на неравенството имаме произведение от няколко двучлена (виж Зад.2). Те се решават по следния начин:

1. Проверяваме дали има двучлени, които са изпълнени за всяко x, като те отпадат при нанасянето на числовата ос. Обикновено това са изрази от вида: $(x^2 + a) \Rightarrow \forall x$ или $(x + a)^2 \Rightarrow \forall x \neq a$.
2. Прилагаме метода на интервалите.

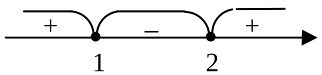
Зад. 1: $x^2 - 3x + 2 < 0$

Решение: От (2) намираме корените на квадратния тричлен:

$$D = 3^2 - 8 = 9 - 8 = 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{D} = 1 \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1,\ x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

I начин – Ще приложим графичния начин. Коефициентът пред x^2 и неравенството имат различни знаци. За да използваме Таблица №2 няма да умножаваме с “–1”, а от Бележка 2 определяме, че $a < 0$, т.е имаме случая (20). Затова решенията са $x \in (1; 2)$

II начин – Ще приложим метода на интервалите. Нанасяме x_1 и x_2 на числовата ос и понеже няма минуси пред неизвестното получаваме

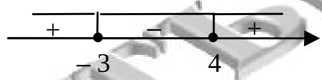


. Решенията са $x \in (1; 2)$

Зад. 2: $(3x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 3)(x - 4) \leq 0$

Решение: От $\left.\begin{matrix} 3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \\ (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ даденото неравенство е: $(x + 3)(x - 4) \leq 0$.

Решаваме го по метода на интервалите:



. Решенията са $x \in [-3; 4]$

4. Биквадратни уравнения

Биквадратните уравнения имат вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, (27)
където $a \neq 0$, b и c са реални коефициенти.

Биквадратните уравнения се решават чрез полагането $x^2 = y$ и решаваме съответното квадратно уравнение $ay^2 + by + c = 0$. Ако това последно уравнение има корени y_1 и y_2, то следва, че

$$x^2 = y_1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1} \quad и \quad x^2 = y_2 \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}.$$

Броят на корените на биквадратното уравнение се определят от таблица №3

Таблица № 3

Корени на уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$	Корени на $ay^2 + by + c = 0$	Условия
Четири различни реални $x_{1/2} \neq x_{3/4}$	$y_1 > 0$ и $y_2 > 0$	$\left\| \begin{matrix} D > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 . y_2 > 0 \end{matrix} \right.$ (28)
Четири реални корени, които са два по два равни $x_1 = x_3$; $x_2 = x_4$	$y_1 = y_2 > 0$	$\left\| \begin{matrix} D = 0 \\ y_1 = y_2 = -\frac{b}{2a} \end{matrix} \right.$ (29)
Четири равни реални $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$	$y_1 = y_2 = 0$	D = 0 a ≠ 0 b = c = 0 (30)
Три реални, като $x_{1/2} \neq 0$; $x_3 = x_4 = 0$	$y_1 > 0$ и $y_2 = 0$	$\left\| \begin{matrix} y_1 = -\frac{b}{a} > 0 \\ y_2 = c = 0 \end{matrix} \right.$ (31)

<table>
<tr><td>Два различни реални
$x_{1/2} \neq 0$</td><td colspan="2">$y_1 > 0$ и $y_2 < 0$</td><td colspan="2">$\left\lvert \begin{array}{l} a=0 \\ y=-\frac{c}{b}>0 \end{array}\right. \cup \left\lvert \begin{array}{l} a \neq 0 \\ y_1 y_2 < 0 \end{array}\right.$ (32)</td></tr>
<tr><td>Два равни реални
$x_1 = x_2 = 0$</td><td colspan="2">$y_1 = 0$ и $y_2 < 0$</td><td colspan="2">$\left\lvert \begin{array}{l} y_1 = c = 0 \\ y_2 = -\frac{b}{a} < 0 \end{array}\right.$ (33)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Няма реални</td><td colspan="2">$y_1 \in \varnothing$ и $y_2 \in \varnothing$</td><td>$D < 0$</td><td rowspan="2">(34)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y_1 < 0$ и $y_2 < 0$</td><td>$\left\lvert \begin{array}{l} D > 0 \\ y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 . y_2 > 0 \end{array}\right.$</td></tr>
</table>

5. Уравнения от по-висока степен с цели коефициенти

Общият вид на уравнение от n-та степен с цели коефициенти е
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, където $a_0 \neq 0$ (35)

В това уравнение, ако $a_0 = 1$, тогава то добива вида
$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, (36)

Целите рационални корени на уравнение (36) са числа делители на свободния член a_n. Проверката кои от делителите на свободния член a_n са корени на уравнение (36), се извършва с правилото на Хорнер за делене на многочлен на двучлен.

Правило:

Нека да предположим, че коренът на уравнение (36) е b. Тогава можем да разделим многочлена вдясно на (36) с двучлена $(x – b)$ и се получава:
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-b)(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-1})+r$ (37)
Намирането на коефициентите $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ и числото r става по таблицата 3:

Таблица №3

	$a_0=1$	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
b	$c_0=a_0$	$c_1=a_1+bc_0$	$c_2=a_2+bc_1$	…	$c_{n-1}=a_{n-1}+bc_{n-2}$	$r=a_n+bc_{n-1}$

Ако $r = 0$, деленето се извършва без остатък.

Например: Да се раздели многочлена $x^7–3x^6+2x^5+4x^4–3x^3+2x^2–x+5$ на $x – 2$ т.е. $b = 2$.

	1	– 3	2	4	– 3	2	– 1	5
2	1	–3+2.1 =–1	2+2.(–1) =0	4+2.0 =4	– 3+2.4 =5	2+2.5 =12	23	51

И така $x^7–3x^6+2x^5+4x^4–3x^3+2x^2–x+5=(x–2)(x^6–x^5+4x^3+5x^2+12x+23)+51$, където $r=51$.

Зад. 3: Да се намерят целите реални корени на уравнението $x^3+2x^2–x–2= 0$

Решение: Делителите на свободния член са ± 1; ± 2. По правилото на Хорнер (Таблица №3) намираме кой от тях може да бъде решение на даденото уравнение.

	1	2	– 1	– 2
1	1	3	2	0

Щом $r = 0$ числото $x = 1$ е точен корен. Следващите делители не ги проверяваме (за ускоряване на процеса за намирането на корените), а записваме дадения многочлен като произведение от двучлен и квадратна функция
$x^3 + 2x^2 – x – 2 = (x – 1)(x^2 +3x + 2)$. За намиране корените на квадратната функция използваме (2): $D=9-8=1 \Rightarrow \sqrt{D}=1 \Rightarrow x_1=\frac{-3+1}{2}=-1$; $x_2=\frac{-3-1}{2}=-2$,
т.е. даденото уравнение има три решения: $x_1 = 1$, $x_2 = – 1$, $x_3 = – 2$.

Ако в уравнение (35) $a_0 \neq 0$, не може да приложим правилото разгледано за уравнение (36). Затова преобразуваме уравнение (35) като умножим двете му страни с a_0^{n-1} и полагаме $a_0x = y$. Полученото уравнение $y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\ldots+b_{n-1}y+b_n=0$ е с цели коефициенти и с коефициент пред най-високата степен $b_0 = 1$. Върху това уравнение прилагаме схемата на Хорнер.

6. Параметрични уравнения и неравенства

Основни типове задачи:

Зад. 4: Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението $(m – 2)x^2 – 2(2m + 1)x + 2m + 1 = 0$:

а) няма реални корени.
б) има реални корени.
в) има два положителни корена изпълняващи неравенството $x_1 + x_2 > \sqrt{2}$.
г) има два отрицателни реални корени;
д) има два реални корени с различни знаци;
е) има двукратен реален корен.

<u>Решение:</u> а) Използваме (7):

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ (2m+1)^2-(m-2)(2m+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ (2m+1)(m+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\in\left(-3;-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$$

т.е. при $m\in\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$ даденото уравнение няма корени.

б) Използваме (5):

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ D\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ (2m+1)^2-(m-2)(2m+1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \end{cases}$$ т.е. при

$m\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ уравнението има реални корени

в) Използваме (8) като включим и даденото условие:

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ D\geq 0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \\ x_1+x_2>\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \left.\begin{matrix} m\neq 2 \\ (2m+1)^2-(m-2)(2m+1)\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty) \\ \frac{2(2m+1)}{m-2}>\sqrt{2} \Rightarrow \frac{(4-\sqrt{2})m+2+2\sqrt{2}}{m-2}>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{2+2\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right)\cup(2;+\infty) \\ \frac{2m+1}{m-2}>0 \Rightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$m\in(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$

г) Използваме (10) и формулите на Виет (4):

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ D\geq 0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ (2m+1)(m+3)\geq 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-2}<0 \\ \frac{2m+1}{m-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty) \\ m\in\left(-\frac{1}{2};2\right) \\ m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$$

т.е. няма стойности на параметъра, при които корените на даденото уравнение да са отрицателни.

д) Използваме (12):

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ \frac{2m+1}{m-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\in\left(-\frac{1}{2};2\right) \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\frac{1}{2};2\right).$$

е) Използваме (14):

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ (2m+1)(m+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m_1=-\frac{1}{2};\ m_2=-3$$

Зад. 5: Дадено е уравнението $x^2-2(m+1)x-m^2-2m-2=0$, където m е реален параметър.

а) Докажете, че за всяка стойност на m, уравнението има корени с различни знаци.

б) Намерете стойностите на m, за които разликата на корените на даденото уравнение е равна на 6 (ТУВ, 2000)

<u>Решение:</u> а) Решението на това условие става на две стъпки:
А) Първо трябва да докажем, че даденото уравнение има реални корени. За целта проверяваме дали е изпълнено (6): $D=(m+1)^2+(m^2+2m+2)=m^2+2m+1+m^2+2m+2=2m^2+4m+3>0$. Това неравенство е изпълнено за $\forall m$, защото дискриминантата му е $D_1=4-6<0$ и от (19) следва $\forall m$, т.е. даденото уравнение има два различни корени. Нека да ги означим с x_1 и x_2.
В) Проверяваме при кои стойности на m двата корена са с различни знаци. От формулите на Виет знаем, че корените са с различни знаци, когато е изпълнено (12): $x_1.x_2<0 \Leftrightarrow -m^2-2m-2<0\ |.(-1) \Leftrightarrow m^2+2m+2>0$; $D=1-2<0 \Rightarrow \forall m$ т.е. корените имат различни знаци.

От А) и В) следва, че даденото уравнение има два различни корена с различни знаци при $\forall m$.

б) В а) доказахме, че даденото уравнение има корени $x_1>0$ и $x_2<0$. По условие имаме изпълнено $x_1-x_2=6$. Това равенство преобразуваме така, че в лявата му страна да имаме сбор или произведение от двата корена (за да приложим формулите на Виет). За целта повдигаме на квадрат двете му страни $(x_1-x_2)^2=36 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=36$. Прибавяме и изваждаме от лявата страна $2x_1x_2$: $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=36 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36$ и сега използваме формулите на Виет (4): $4(m+1)^2+4(m^2+2m+2)=36 \Rightarrow m^2+2m-3=0$; $D=1+3=4\Rightarrow\sqrt{D}=2;\quad m_1=-1+2=1;\quad m_2=-1-2=-3$ т.е. при $m_1=1$ и $m_2=-3$ разликата от корените на даденото уравнение е равна на 6.

Зад. 6: Дадено е квадратното уравнение $x^2-5x+m=0$, където m е реален параметър.

а) За кои стойности на m уравнението има два реални корени x_1 и x_2, за които е изпълнено $x_1^2+x_2^2=13$?

б) За кои стойности на m уравнението има два реални корени x_1 и x_2,за

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg
==

които е изпълнено $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}>0$? (ТУГ, 2000)

Решение: а) Даденото уравнение, за да има два реални корена трябва да е изпълнено (5): $D=25-4m\ge 0 \Leftrightarrow m\le\frac{25}{4}$. От формулите на Виет (4) имаме $x_1+x_2=5$; $x_1 x_2=m$. Преобразуваме даденото уравнение като прибавим и извадим от лявата му страна $2x_1x_2$ и получаваме $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13 \Leftrightarrow 5^2-2m=13 \Leftrightarrow$ $m=6\in\left(-\infty;\frac{25}{4}\right]$. Следователно при $m=6$ даденото уравнение има два реални корена, изпълняващи даденото условие.

б) Преобразуваме даденото неравенство така, че в него да се съдържат само сбор и произведение от двата корена и използваме формулите на Виет (4):

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}>0\Leftrightarrow\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}>0\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1x_2}>0\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)}{x_1x_2}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{x_1x_2}>0.\ Но\ x_1+x_2=5,\ x_1x_2=m\Rightarrow\frac{5(5^2-3m)}{m}>0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{25}{3}\right)\\ Но\ D=25-4m\ge 0\Leftrightarrow m\le\frac{25}{4}\end{array}\right\}\Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{25}{4}\right)$$

Следователно даденото уравнение има решения изпълняващи даденото неравенство при $m\in\left(0;\frac{25}{4}\right)$

Зад. 7: За кои стойности на реалния параметър m неравенството $f(x)=(2-m)x^2-2mx+1<0$.

а) Има решение за $\forall x$.

б) Няма решение.

в) Има решение извън корените на $f(x)=0$.

г) Има решение между корените на $f(x)=0$.

д) Има решение $\forall x$ без двойния корен на $f(x)=0$.

Решение: а) От (19) знаем, че неравенство има решение за $\forall x$, ако знакът на коефициента пред x^2 и знакът на неравенството съвпадат , и $D<0$. За нашия случай това е системата $\left|\begin{array}{l}2-m<0\\ m^2-(2-m)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m^2+m-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m\in(-2;1)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing$ т.е. няма стойности на m при които даденото неравенство да има решение за $\forall x$.

б) В този случай използваме (21) и (22) (за $a=2-m>0$ виж Бележката 2).
$\left|\begin{array}{l}2-m>0\\ m^2-(2-m)\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m<2\\ m^2+m-2\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m<2\\ m\in[-2;1]\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in[-2;1]$ т.е. при $m\in[-2;1]$ даденото неравенство няма решение.

в) Ако корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2, то исканото условие е (17) (за $a=2-m<0$ виж Бележката 2):
$\left|\begin{array}{l}2-m<0\\ m^2-(2-m)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m^2+m-2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(2;+\infty)$. Това е и решението на задачата.

г) Ако корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2, то исканото решение е $x\in(x_1;x_2)$. Това условие е изпълнено при (20) (за $a\ 2-m>0$ виж Бележката 2):
$\left|\begin{array}{l}2-m>0\\ m^2-(2-m)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m<2\\ m^2+m-2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m<2\\ m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(1;2)$. Това е и решението на задачата.

д) Нека корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2, то исканото решение е $\forall x\ne x_1=x_2$. Това условие е изпълнено при (18):
$\left|\begin{array}{l}2-m<0\\ m^2-(2-m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m^2+m-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m>2\\ m_1=-2;\ m_2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing$. Това е и решението на задачата.

Зад. 8: За кои стойности на реалния параметър m уравнението $(m-1)x^4-4x^2+m+2=0$ има:

а) четири реални корена.

б) два реални корена.

в) няма реални корени.

Решение: Даденото уравнение е биквадратно, затова полагаме $x^2=y$ и получаваме квадратното уравнение $(m-1)y^2-4y+m+2=0$ (C).

а) Даденото уравнение за да има четири корена (може и да са равни), то уравнение (C) трябва да има два положителни корена (може и да са равни). От (28) следва

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 37 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

$$\left|\begin{array}{l} D\ge 0\\ y_1+y_2\ge 0\\ y_1y_2\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4-(m-1)(m+2)\ge 0\\ \dfrac{4}{2(m-1)}\ge 0\\ \dfrac{m+2}{m-1}\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m^2+m-6\le 0\\ m-1>0\\ (m+2)(m-1)\ge 0,\ при\ m\ne 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\in[-3;2]\\ m>1\\ m\in(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$m\in(1;\ 2]$ т.е. при $m\in(1;\ 2]$ даденото уравнение има четири реални корена.

б) Даденото уравнение за да има два корена (може и да са равни), то уравнение (С) трябва да има при $a=0$ корен $y>0$ и при $a\ne0$ корени $y_1\ge0$ и $y_2<0$. От (32) и (33) следват два случая:

А) Когато $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, тогава уравнение (С) има един корен и той трябва да е положителен. За да проверим какъв е знакът на корена, заместваме $m=1$ в (С) : $0.y^2-4y+1+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}>0$, т.е. $m=1$ е решение на задачата.

В) Когато $m-1\ne0 \Leftrightarrow m\ne1$, тогава единият корен на (С) е отрицателен (например $y_2<0$) а другият положителен или нула: $y_1.y_2\le0$. От формулите на Виет получаваме $\frac{m+2}{m-1}\le 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-1)\le 0,\ при\ m\ne1 \Leftrightarrow m\in[-2;1)$

От А) и В) следва, че при $m\in[-2;\ 1]$ даденото уравнение има два реални корена.

в) Биквадратното уравнение няма реални корена, ако за уравнение (С) са изпълнени (34). Затова разглеждаме следните два случая:

А) Уравнение (С) няма решение, а това е при $D<0$: $4-(m+2)(m-1)<0 \Leftrightarrow m^2+m-6>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-3)((2;+\infty)$.

В) Уравнение (С) има два отрицателни корена:

$$\left|\begin{array}{l} D\ge 0\\ y_1+y_2<0\\ y_1.y_2>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m^2+m-6\le 0\\ \dfrac{4}{2(m-1)}<0\\ \dfrac{m+2}{m-1}>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\in[-3;2]\\ m<1\\ m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow m\in[-3;-2)$$

От А) и В) следва, че при $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ биквадратното уравнение няма реални корени.

Задачи за упражнение:

Следват 47 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.