

## Логаритмични уравнения и неравенства

### I. Логаритмична функция

Функция от вида  $y = \log_a x$ , където  $a$  е положително число, различно от 1, а  $x$  – променлива по-голяма от 0, се нарича логаритмична функция, т.е.

$$y = \log_a x, \text{ ДМ: } \begin{cases} a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x \in (0;+\infty) \end{cases} \quad (1).$$

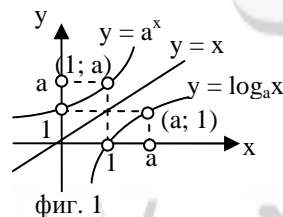
Логаритмична функция с основа 10 се нарича десетичен логаритъм и вместо  $\log_{10} x$  се използва означението  $\lg x$ .

Логаритмична функция с основа неперовото число ( $e$ ) се нарича натурален (естествен) логаритъм. Вместо  $\log_e x$  се използва означението  $\ln x$ .

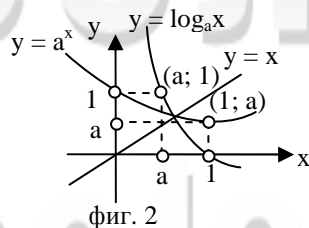
Като имаме предвид (4) от уроци "Показателни уравнения и неравенства" се оказва, че логаритмичната функция е обратна на показателната функция.

На фиг. 1 са представени графиките на обратните функции:  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$ , когато  $a > 1$ . На фиг. 2 са представени графиките на обратните функции:  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$ , когато  $0 < a < 1$ . Виждаме, че те са симетрични спрямо ъглополовящата на I и III квадрант.

$a > 1$		
$x$	1	$a$
$y = \log_a x$	0	1



$0 < a < 1$		
$x$	$a$	1
$y = \log_a x$	1	0



Разглеждайки

графиката на логаритмичната функция, може да се изкажат следните свойства:

- ◆ **СВОЙСТВО 1** – графиката на функцията минава през точките с координати  $(1; 0)$  и  $(a; 1)$ ; т.е.  $\log_a 1 = 0$  и  $\log_a a = 1$ ;
- ◆ **СВОЙСТВО 2** – графиката е разположена в I и IV квадрант ("надясно" от оста Oy) т.е.  $x > 0$ ;
- ◆ **СВОЙСТВО 3** – Ако  $a \in (0; 1)$ , логаритмичната функция е намаляваща, като:
  - при  $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$ , т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)

- при  $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$ , т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)

- Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал  $[p; q]$  се намира от

$$\begin{cases} \min_{x \in [p; q]} y = \log_a \max_{x \in [p; q]} f(x) \\ \max_{x \in [p; q]} y = \log_a \min_{x \in [p; q]} f(x) \end{cases} \quad (2)$$

- ◆ **Свойство 4** – Ако  $a \in (1; +\infty)$ , логаритмичната функция е растяща, като:

- при  $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$ , т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)

- при  $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$ , т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)

- Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал  $[p; q]$  се намира от

$$\begin{cases} \min_{x \in [p; q]} y = \log_a \min_{x \in [p; q]} f(x) \\ \max_{x \in [p; q]} y = \log_a \max_{x \in [p; q]} f(x) \end{cases} \quad (3)$$

#### Бележки:

1. Формулите от (4) до (14) са в сила, когато:  $A > 0$  (в (5) и (11)  $A \neq 1$ ),  $B > 0$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  и  $b \neq 1$ .
2. Основната формула за смяна на основата (4) често се използва и във вида  $\log_b a \cdot \log_a A = \log_b A$  (15)

#### Правила:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \quad (4)$$

$$\log_a A = \frac{1}{\log_A a} \quad (5)$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \quad (6)$$

$$\log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A \quad (7)$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m} \quad (8)$$

$$\log_a a^n = n \quad (9)$$

$$\log_a A^n = \log_a A \quad (10)$$

$$a^{\log_a A} = A \quad (11)$$

$$a^{\log_b A} = A^{\log_b a} \quad (12)$$

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B \quad (13)$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \quad (14)$$

- ◆ **СВОЙСТВО 5** – Всяка права успоредна на оста  $Ox$  пресича графиката на функцията  $y = \log_a x$  само в една точка. Следователно логаритмичната функция е обратима.

$$m \in \left[-\frac{13}{12}; -1\right) \cup (1; +\infty)$$

## II. Логаритмични уравнения

Уравнение, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично уравнение. Уравнение от вида:  $\log_a f(x) = b$ , където  $f(x) > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , се нарича основно логаритмично уравнение.

Решаването на логаритмични уравнения се свежда до решаването на уравнения от следните два вида:

1) Основно уравнение – решава се по следния начин

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x), \text{ където ДМ: } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad (16)$$

2) Уравнение, при което от двете страни на равенството имаме логаритъм при една и съща основа – решава се по следната схема

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \text{ където ДМ: } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (17)$$

### Бележка:

При решаването на уравнения (16) и (17) може и да не се търси ДМ, но при намирането на корените задължително се проверява кои от тях са решение на даденото уравнение.

### Следват избрани задачи от

#### Основни типове задачи:

- ◆ Уравнение от вида (16)

Зад. 4:  $\log_3(x^2-4)^2=2$

Зад. 1: Да се намери най-малката стойност на функцията  $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x-3)$

**Решение:** Като сравним с (1) виждаме, че  $0 < a < 1 \Rightarrow$  функцията  $y$  е намаляваща (т.е. ще използваме (2)) и я изследваме за най-малката стойност в интервала на Д.М. Затова намираме Д.М.:  $-x^2+4x-3 > 0 \Rightarrow x \in (1; 3)$  и полагаме  $f(x) = -x^2+4x-3$ . Графиката на тази функция е парабола с върха нагоре (защото  $a = -1$ ). Затова максималната и стойност е в точката  $-\frac{b}{2a}$ , т.е.:

$$\max_{x \in (1;3)} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = -4+8-3 = 1 \Rightarrow \min_{x \in (1;3)} y = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0.$$

Зад. 2: Намерете стойностите на параметъра  $m$ , при които уравнението  $\log_3 x + (m^2 - 1)\log_3 x + 2m + 3 = 0$ , има реални корени, по малки от 1.

**Решение:** Определяме Д.М.:  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ . По условие се интересуваме само от тези корени, които са по-малки от 1, затова разглеждаме интервала  $(0; 1)$ . Сменяме основата в даденото уравнение  $\log_3 x + \frac{m^2 - 1}{\log_3 x} + 2m + 3 = 0$ . Полагаме  $\log_3 x = y$  и

получаваме уравнението  $y + \frac{m^2 - 1}{y} + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (2m + 3)y + m^2 - 1 = 0$  (A). За да

решим това уравнение, трябва да намерим в какви граници се изменя  $y$ . От полагането виждаме, че основата на логаритъма е по-голяма от 1, т.е. логаритмичната функция е растяща (фиг. 1). По условие  $x \in (0; 1)$ , тогава от фиг. 1 и Свойство 4 следва, че  $y < 0$ , т.е. уравнение (A) трябва да има реални корени, за които е изпълнено  $y_1 \leq y_2 < 0$ . Условието числото 0 да е надясно от двата корена е

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 4(m^2-1) \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ -\frac{2m+3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m+13 \geq 0 \\ (m-1)(m+1) > 0 \\ 2m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{13}{12} \\ m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

Решение: ДМ:  $(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow \forall x_{1/2} \neq \pm 2$

$$\log_3(x^2 - 4)^2 = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x^2 - 7)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2} = \pm 1 \\ x_{3/4} = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

### Бележка:

Тази задача може да се реши и ако използваме формула (6). Ако я приложим по следния начин:  $\log_3(x^2 - 4)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_3(x^2 - 4) = 2 \mid : 2 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{7}$ , губим две решения. Това е така, защото формула (6) е вярна само при  $A > 0$ . Затова в общия случай (какъвто е нашият), формула (6) трябва да има следния вид:  $\log_a A^n = n \cdot \log_a |A|$  (18)

Дадената задача се решава с помощта на формула (18):

$$\log_3(x^2 - 4)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_3 |x^2 - 4| = 2 \Leftrightarrow \log_3 |x^2 - 4| = 1 \Leftrightarrow |x^2 - 4| = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1, x_{3/4} = \pm \sqrt{7}$$

### ◆ Уравнение от вида (17)

Зад. 5:  $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

Решение: Д.М.:  $\begin{cases} x^2 - 7x + 11 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$x \in \left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

Основите са еднакви от двете страни на равенството и прилагаме (17):

$x^2 - 7x + 11 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0; x_1 = 3 \notin \text{ДМ}; x_2 = 5 \in \text{ДМ}$ , т.е. дадено-то уравнение има един корен  $x = 5$ .

### ◆ Решаване чрез полагане

Зад. 7:  $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2$  (МГУ, 2006)

Решение: Д.М.:  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 9\right) \cup (9; +\infty)$

Сменяме основата и преобразуваме:

$$\frac{5 \log_9 x + \log_9 x^3 + 8 \log_9 x^2}{\log_9 \frac{x}{9}} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \log_9 x + \log_9 x^3 + 8 \log_9 x^2}{\log_9 x - \log_9 9} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \log_9 x + \log_9 x^3 + 8 \log_9 x^2}{\log_9 x - 1} = 2$$

$$\frac{5 \log_9 x + \log_9 x^3 + 8 \log_9 x^2}{\log_9 x - 1} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \log_9 x + \log_9 x^3 + 8 \log_9 x^2}{\log_9 x - 1} = 2$$

$$\frac{5y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow \frac{5y}{y-1} - \frac{3y}{y-1} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \quad \text{Д.М.}_y: \forall y \neq -\frac{1}{2}, 1$$

$$4y^2 + 2y + 16y^2 - 16y = 4y^2 - 2y - 2 \Rightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = \frac{1}{4}$$

Тогава А)  $\log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 3 \in \text{Д.М.}$

В)  $\log_9 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \in \text{Д.М.}$

### Бележка:

При преобразуването на уравненията в Зад. 7 и Зад. 9 за смяна на основата сме използвали формула (6), а не (18), защото ДМ е положително число. Ако в ДМ се включваха и отрицателни числа, то задължително трябваше да използваме (18).

### ◆ Модулни уравнения

Зад. 13:  $\lg|x - 1| = 1 - |\lg(x+2)|$

Решение: ДМ:  $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$ . Анулираме изразите под модул

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; \lg(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 10^0 \Leftrightarrow x = -1$ . Разделяме ДМ на подинтервали и определяме знака на всеки модул. Резултатите са показани в долната таблица

	-2		-1				1			+
$x - 1$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$\lg(x+2)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+

Разглеждаме следните случая:

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

А) При  $x \in (-2; -1)$ . Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида  $\lg[-(x-1)] = 1 + \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow \lg \frac{1-x}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x+2} = 10^1 \Leftrightarrow$

$$11x = -19 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{11} \in (-2; -1) \Rightarrow x = -\frac{19}{11} \text{ е решение}$$

В) При  $x \in [-1; 1)$ . Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида  $\lg[-(x-1)] = 1 - \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(1-x) + \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow (1-x)(x+2) = 10^1 \Leftrightarrow x^2 + x + 8 = 0$ ;  $D = 1 - 32 < 0 \Rightarrow$  даденото уравнение няма решение при  $x \in [-1; 1)$ .

С) При  $x \in (1; +\infty)$ . Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида  $\lg(x-1) = 1 - \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(x-1) + \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 10^1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ ;  $x_1 = -4 \notin (1; +\infty)$ ,  $x_2 = 3 \in (1; +\infty) \Rightarrow$  даденото уравнение има решение  $x = 3$

От А), В) и С) следва, че решенията на даденото уравнение са  $x_1 = -\frac{19}{11}$ ;  $x_2 = 3$

- ◆ Уравнения в които се използва формулата за смяна на основата във вида (15):

Зад. 14:  $\log_{x+1} 3 \cdot \log_{2x+1}(x+1) + \log_{x+1}(x^2 - 2x + 6) \cdot \log_{2x+1}(x+1) = 2$ .

Решение:

$$D.M._x: \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \neq 1 \\ x^2 - 2x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ \forall x \text{ (защото } D < 0) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$$

Преобразуваме даденото уравнение по следния начин:  $[\log_{x+1} 3 + \log_{x+1}(x^2 - 2x + 6)] \cdot \log_{2x+1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_{x+1} 3(x^2 - 2x + 6) \cdot \log_{2x+1}(x+1) = 2$ . Използваме формула (15) и получаваме  $\log_{2x+1}(3x^2 - 6x + 18) = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 18 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 18 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 17 = 0$ ;  $x_1 = -5 - \sqrt{42} \notin D.M.$ ;  $x_2 = \sqrt{42} - 5 \in D.M.$  Следователно  $x = \sqrt{42} - 5$  е решение на даденото уравнение.

- ◆ Параметрични уравнения

Зад. 15: Да се реши уравнението  $\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a |a + \log_a x| = a \log_x a$ , където  $a$  е реален параметър.

Решение:  $D.M._x: \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ ;  $D.M._a: \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ . На всички логаритми определяме осно-

ва  $a$ .  $\log_a x + \frac{2}{\log_a x} |a + \log_a x| = \frac{a}{\log_a x} \Leftrightarrow \log_a^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0$ . Полагаме

$\log_a x = y$  и горното уравнение добива вида  $y^2 + 2|a + y| - a = 0$  (С). Премахваме модула като разглеждаме два случая:

А) При  $a + y < 0 \Leftrightarrow y < -a$ , уравнение (С) добива вида  $y^2 - 2(a + y) - a = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3a = 0$ . Решенията му са  $y_1 = 1 + \sqrt{1+3a}$ ;  $y_2 = 1 - \sqrt{1+3a}$ . Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (А):

1)  $1 + \sqrt{1+3a} < -a \Leftrightarrow \sqrt{1+3a} < -a - 1$ . За да е изпълнено това неравенство трябва да е изпълнено  $-a - 1 > 0 \Leftrightarrow a < -1 \notin D.M._a$ . Следователно корена  $y_1 = 1 + \sqrt{1+3a}$  не е решение на даденото уравнение.

2)  $1 - \sqrt{1+3a} < -a \Leftrightarrow \sqrt{1+3a} > 1 + a$ . Това неравенство се решава като решим следните две системи:

$$a) \begin{cases} 1+3a \geq 0 \\ 1+a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{3} \\ a \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$

$$б) \begin{cases} 1+a > 0 \\ (\sqrt{1+3a})^2 > (1+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a^2 - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0; 1) \in D.M._a$$

От 1) и 2) следва, че при  $a \in (0; 1)$  решението е  $y = 1 - \sqrt{1+3a}$ . Като заместим в полагането получаваме  $\log_a x = 1 - \sqrt{1+3a} \Leftrightarrow x = a^{1 - \sqrt{1+3a}}$

В) При  $a + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -a$ , уравнение (С) добива вида  $y^2 + 2(a + y) - a = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + a = 0$ . Решенията му са  $y_1 = -1 + \sqrt{1-a}$ ;  $y_2 = -1 - \sqrt{1-a}$ . Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (В):

1)  $-1 + \sqrt{1-a} \geq -a \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \geq 1 - a$ . Разглеждаме следните две системи:

$$a) \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ 1-a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow H.P.$$

$$б) \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ (\sqrt{1-a})^2 \geq (1-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a^2 - a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a \in [0; 1] \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0; 1) \in D.M._a$$

$$2) -1 - \sqrt{1-a} \geq -a \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \leq a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ a-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \notin D.M._a$$

$$\left(\sqrt{1-a}\right)^2 \leq (a-1)^2 \quad a^2 - a \leq 0$$

От 1) и 2) следва, че при  $a \in (0; 1)$  решението е  $y = -1 + \sqrt{1-a}$ . Като заместим в полагането получаваме  $\log_a x = \sqrt{1-a} - 1 \Leftrightarrow x = a^{\sqrt{1-a}-1}$

От А) и В) следва, че даденото уравнение при  $a \in (0; 1)$  има две решения  $x_1 = a^{\sqrt{1-a}-1}$ ;  $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$ , а при  $a \in (1; +\infty)$  – няма решения.

Зад. 16: Намерете при кои стойности на параметъра  $a$ , уравнението  $\frac{1}{2} \lg(ax) = \lg(x+1)$  има точно едно решение.

Решение: Д.М.:  $\begin{cases} x+1 > 0 \\ ax > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ ax > 0 \end{cases}$ . Решаваме даденото уравнение

$\lg(ax) = 2 \lg(x+1) \Leftrightarrow \lg(ax) = \lg(x+1)^2 \Leftrightarrow ax = (x+1)^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - (a-2)x + 1 = 0$  (С). Даденото уравнение, за да има точно едно решение, то за уравнение (С) имаме следните случаи:

А)  $\begin{cases} D = 0 \\ x > -1 \\ ax > 0 \end{cases}$ .  $D = (a-2)^2 - 4 = a^2 - 4a = 0$ ;  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 4$ . При  $a_1 = 0$  не е изпълнено

$ax > 0$ , следователно  $a_1 = 0$  не е решение на даденото уравнение. При  $a_1 = 4$  даденото уравнение има вида  $\frac{1}{2} \lg(4x) = \lg(x+1)$  и има точно един корен  $x = 1$ , следователно

$a_1 = 4$  е решение на даденото уравнение.

В) Уравнение (С) има две решения, но единият корен е по-малък от  $-1$ , т.е. числото  $-1$  е между двата корена. Това е възможно, когато е изпълнено  $1 \cdot f(-1) < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (-1)(a-2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 + a - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow a < 0$

От А) и В) следва, че даденото уравнение има точно едно решение при  $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$ .

◆ Графично решаване

Зад. 17:  $\log_2 x = 3 - x$ .

Решение: ДМ:  $x > 0$ . Лявата страна на даденото уравнение е растяща логаритмична функция (защото основата  $2 > 1$ ), а дясната – намаляваща функция. Следователно двете функции ще се пресичат само в една точка (може и да не се пресичат) т.е. решението (ако има такова) на даденото уравнение е само едно. С непосредствена проверка установяваме, че  $x = 2$  е корен на уравнението.

### III. Логаритмични неравенства

Неравенство, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично неравенство, т.е. неравенство от вида  $\log_a f(x) > b$ , където  $f(x) > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Решаването на логаритмични неравенства се свежда до решаването на неравенства от следните два вида:

**Бележка:**

Както всички неравенства, така и логаритмичните, започват да се решават със задължително намиране на ДМ.

1) Неравенство от вида  $\log_a f(x) < b$ , където  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  (19)

Решаването му зависи от вида на основата:

◆ Ако  $0 < a < 1$ , то имаме  $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b$ , (20)  
т.е. знакът на неравенството се променя;

◆ Ако  $a > 1$ , то имаме  $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) < a^b$ , (21)  
т.е. знакът на неравенството се запазва;

2) Неравенство от вида  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ , където  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  (22)

Решаването му зависи от вида на основата:

◆ Ако  $0 < a < 1$ , то имаме  $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ , (23)  
т.е. знакът на неравенството се променя;

◆ Ако  $a > 1$ , то имаме  $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ , (24)  
т.е. знакът на неравенството се запазва;

**Следват избрани задачи от**

**Основни типове задачи:**

- ◆ Неравенство от вида (19)

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

Зад. 18:  $\log_2(x+3) - \log_2(2x-1) > 5 - \log_3 9$ .

Решение: Д.М.:  $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . Преобразуваме даденото

неравенство използвайки свойствата на логаритмите и получаваме  $\log_2 \frac{x+3}{2x-1} > 3$ .

Основата е  $2 > 1$  и прилагаме (21)

$$\log_2 \frac{x+3}{2x-1} > 3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1} > 2^3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1} - 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-16x+8}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow (11-15x)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{11}{15}\right) \in \text{Д.М.}$$

Зад. 21:  $x^{2-\log_3^2 x - \log_3 x^2} > \frac{1}{x}$

Решение: Д.М:  $x > 0$ .

### I начин

Логаритмуваме двете страни на даденото неравенство при основа 3 и преобразуваме  $\log_3 x^{2-\log_3^2 x - \log_3 x^2} > \log_3 \frac{1}{x} \Leftrightarrow [2 - \log_3^2 x - 2 \log_3 x] \cdot \log_3 x > -\log_3 x$

Полагаме  $\log_3 x = y$  и получаваме  $(2 - y^2 - 2y) \cdot y + y > 0 \Leftrightarrow y(y^2 + 2y - 3) < 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty; -3) \cup (0; 1)$ . Разглеждаме следните случаи:

A)  $y \in (-\infty; -3)$ , тогава от полагането следва  $\log_3 x < -3 \Leftrightarrow x < 3^{-3} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{27}\right)$ .

B)  $y \in (0; 1)$ , тогава от полагането следва  $\begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3^0 \\ x < 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3)$ .

От A) и B) получаваме крайните решения  $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (1; 3)$ .

### II начин

Преобразуваме до  $x^{2-\log_3^2 x - \log_3 x^2} > x^{-1}$ . Имаме показателно неравенство с основа зависеща от неизвестното, затова разглеждаме следните случаи:

A)  $\begin{cases} 0 < x < 1 & (1) \\ 2 - \log_3^2 x - \log_3 x^2 < -1 & (2) \end{cases}$

2)  $2 - \log_3^2 x - 2 \log_3 x < -1 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 2 \log_3 x - 3 > 0$ . Полагаме  $\log_3 x = y$  и получаваме квадратното неравенство  $y^2 + 2y - 3 > 0$ . Решенията му са  $y \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ . От полагането получаваме:

а) При  $y < -3 \Rightarrow \log_3 x < -3 \Leftrightarrow x < \frac{1}{27}$ . Засичаме с (1) и получаваме решението  $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right)$

б) При  $y > 1 \Rightarrow \log_3 x > 1 \Leftrightarrow x > 3 \notin (0; 1)$ .

От а) и б) следва, че в този случай даденото неравенство има решение

$$x \in \left(0; \frac{1}{27}\right)$$

$$B) \begin{cases} x > 1 \\ 2 - \log_3^2 x - \log_3 x^2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3^2 x + 2 \log_3 x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \left(\frac{1}{27}; 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3)$$

Обединяваме решенията от (A) и (B), т.е.  $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (1; 3)$

## Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) раздел „За нас“.