Учебен център "СОЛЕМА"
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Логаритмични уравнения и неравенства

I. Логаритмична *функция*

Функция от вида $y = \log_a x$, където a е положително число, различно от 1, а x – променлива по-голяма от 0, се нарича логаритмична функция, т.е.

$$y = \log_a x,\ \text{ДМ: } \begin{cases} a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x \in (0;+\infty) \end{cases} \qquad (1).$$

Логаритмична функция с основа 10 се нарича десетичен логаритъм и вместо $\log_{10} x$ се използва означението $\lg x$.

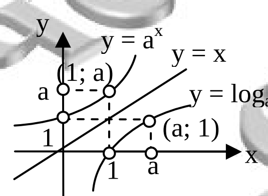
Логаритмична функция с основа неперовото число (e) се нарича натурален (естествен) логаритъм. Вместо $\log_e x$ се използва означението $\ln x$.

Като имаме предвид (4) от уроци "Показателни уравнения и неравенства" се оказва, че логаритмичната функция е обратна на показателната функция.

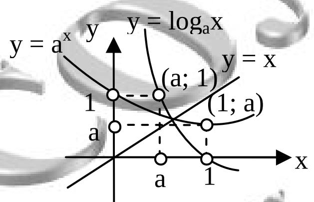
На фиг. 1 са представени графиките на обратните функции: $y = a^x$ и $y = \log_a x$, когато $a > 1$. На фиг. 2 са представени графиките на обратните функции: $y = a^x$ и $y = \log_a x$, когато $0 < a < 1$. Виждаме, че те са симетрични спрямо ъглополовящата на I и III квадрант.

a > 1		
x	1	a
y = $\log_a x$	0	1

0 < a < 1		
x	a	1
y = $\log_a x$	1	0



фиг. 1



фиг. 2

Разглеждайки графиката на логаритмичната функция, може да се изкажат следните свойства:

- Свойство 1 – графиката на функцията минава през точките с координати : (1; 0) и (a ; 1); т.е. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$;
- Свойство 2 – графиката е разположена в I и IV квадрант ("надясно" от оста Oy) т.е $x > 0$;
- Свойство 3 – Ако $a \in (0; 1)$, логаритмичната функция е намаляваща, като:
  - при $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$, т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)
  - при $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$, т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)
  - Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал [p; q] се намира от

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \max\limits_{x\in[p;q]} f(x) \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \min\limits_{x\in[p;q]} f(x) \end{cases} \qquad (2)$$

- Свойство 4 – Ако $a \in (1; +\infty)$, логаритмичната функция е растяща, като:
  - при $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$, т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)
  - при $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$, т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)
  - Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал [p; q] се намира от

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \min\limits_{x\in[p;q]} f(x) \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \max\limits_{x\in[p;q]} f(x) \end{cases}$$
(3)

Правила:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \qquad (4)$$

$$\log_a A = \frac{1}{\log_A a} \qquad (5)$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \qquad (6)$$

$$\log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A \qquad (7)$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m} \qquad (8)$$

$$\log_a a^n = n \qquad (9)$$

$$\log_{a^n} A^n = \log_a A \qquad (10)$$

$$a^{\log_a A} = A \qquad (11)$$

$$a^{\log_b A} = A^{\log_b a} \qquad (12)$$

$$\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B \qquad (13)$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \qquad (14)$$

Бележки:

1. Формулите от (4) до (14) са в сила, когато: A>0 (в (5) и (11) A≠1), B>0, a>0 и a≠1, b>0 и b≠1.
2. Основната формула за смяна на основата (4) често се използва и във вида $\log_b a . \log_a A = \log_b A$ (15)

- Свойство 5 – Всяка права успоредна на оста Ох пресича графиката на функцията $y = \log_a x$ само в една точка. Следователно логаритмичната функция е обратима.

Зад. 1: Да се намери най-малката стойност на функцията $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2+4x-3\right)$

<u>Решение:</u> Като сравним с (1) виждаме, че $0 < a < 1 \Rightarrow$ функцията y е намаляваща (т.е. ще използваме (2)) и я изследваме за най-малката стойност в интервала на Д.М. Затова намираме Д.М.: $-x^2+4x-3>0 \Rightarrow x\in(1;\,3)$ и полагаме $f(x) = -x^2+4x-3$. Графиката на тази функция е парабола с върха нагоре (защото $a = -1$). Затова максималната и стойност е в точката $-\frac{b}{2a}$, т.е.:

$$\max_{x\in(1;3)} f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(2)=-4+8-3=1\Rightarrow \min_{x\in(1;3)} y=\log_{\frac{1}{3}}1=0\cdot$$

Зад. 2: Намерете стойностите на параметъра m, при които уравнението $\log_3 x+\left(m^2-1\right)\log_x 3+2m+3=0$, има реални корени, по малки от 1.

<u>Решение:</u> Определяме $Д.М.:\left|\begin{array}{l}x>0\\x\neq1\end{array}\right.$. По условие се интересуваме само от тези корени, които са по-малки от 1, затова разглеждаме интервала (0; 1). Сменяме основата в даденото уравнение $\log_3 x+\dfrac{m^2-1}{\log_3 x}+2m+3=0$. *Полагаме* $\log_3 x = y$ и получаваме уравнението $y+\dfrac{m^2-1}{y}+2m+3=0 \Leftrightarrow y^2+(2m+3)y+m^2-1=0 \quad (A)$. За да решим това уравнение, трябва да намерим в какви граници се изменя y. От полагането виждаме, че основата на логаритъма е по-голяма от 1, т.е. логаритмичната функция е растяща (фиг. 1). По условие $x\in(0;\,1)$, тогава от фиг. 1 и Свойство 4 следва, че $y < 0$, т.е. уравнение (A) трябва да има реални корени, за които е изпълнено $y_1\le y_2<0$. Условието числото 0 да е надясно от двата корена е

$$\left|\begin{array}{l}D\ge0\\f(0)>0\\-\dfrac{b}{2a}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}(2m+3)^2-4\left(m^2-1\right)\ge0\\m^2-1>0\\-\dfrac{2m+3}{2}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}12m+13\ge0\\(m-1)(m+1)>0\\2m+3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}m\ge-\dfrac{13}{12}\\m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\m>-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$m\in\left[-\frac{13}{12};-1\right)\cup(1;+\infty)$$

II. Логаритмични уравнения

Уравнение, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично уравнение. Уравнение от вида: $\log_a f(x)=b$, където $f(x) > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b \in R$, се нарича основно логаритмично уравнение.

Решаването на логаритмични уравнения се свежда до решаването на уравнения от следните два вида:

1) Основно уравнение – решава се по следния начин

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow a^b = f(x),\ \text{където ДМ: }\left|\begin{array}{l}a>0\\a\neq1\\f(x)>0\end{array}\right. \qquad (16)$$

2) Уравнение, при което от двете страни на равенството имаме логаритъм при една и съща основа – решава се по следната схема

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \text{където ДМ: }\left|\begin{array}{l}a>0\\a\neq1\\f(x)>0\\g(x)>0\end{array}\right. \qquad (17)$$

Бележка:

При решаването на уравнения (16) и (17) може и да не се търси ДМ, но при намирането на корените задължително се проверява кои от тях са решение на даденото уравнение.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

- Уравнение от вида (16)

Зад. 4: $\log_3(x^2-4)^2=2$

<u>Решение:</u> ДМ: $(x^2 - 4)>0 \Leftrightarrow \forall x_{1/2} \neq \pm 2$

$$\log_3 \left(x^2 - 4\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 7\right)\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2} = \pm 1 \\ x_{3/4} = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Бележка:

Тази задача може да се реши и ако използваме формула (6). Ако я приложим по следния начин: $\log_3(x^2-4)^2=2 \Leftrightarrow 2.\log_3(x^2-4)=2 \;|: 2 \Leftrightarrow \log_3(x^2-4)=1 \Leftrightarrow x^2-4=3$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{7}$, губим две решения. Това е така, защото формула (6) е вярна само при $A>0$. Затова в общия случай (какъвто е нашият), формула (6) трябва да има следния вид: $\log_a A^n = n.\log_a|A|$ (18)

Дадената задача се решава с помощта на формула (18):
$\log_3(x^2-4)^2=2 \Leftrightarrow 2.\log_3|x^2-4|=2 \Leftrightarrow \log_3|x^2-4|=1 \Leftrightarrow |x^2-4|=3 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1,\; x_{3/4} = \pm\sqrt{7}$

- Уравнение от вида (17)

Зад. 5: $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

<u>Решение:</u> $Д.М.: \left| \begin{array}{l} x^2 - 7x + 11 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ x > 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$x \in \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Основите са еднакви от двете страни на равенството и прилагаме (17):
$x^2 - 7x + 11 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$; $x_1 = 3 \notin$ ДМ; $x_2 = 5 \in$ ДМ, т.е. даденото уравнение има един корен $x = 5$.

- Решаване чрез полагане

Зад. 7: $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$ (МГУ, 2006)

<u>Решение:</u> $Д.М.: \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 9\right) \cup (9; +\infty)$

Сменяме основата и преобразуваме:

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9 \frac{x}{9}} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 \frac{9}{x}} + \frac{8\log_9 x^2}{\log_9\left(9x^2\right)} = 2 \Leftrightarrow \frac{5\log_9 x}{\log_9 x - \log_9 9} + \frac{3\log_9 x}{\log_9 9 - \log_9 x} + \frac{16\log_9 x}{\log_9 9 + 2\log_9 x} = 2 \Leftrightarrow$$

$\frac{5\log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3\log_9 x}{1 - \log_9 x} + \frac{16\log_9 x}{1 + 2\log_9 x} = 2.$ *Полагаме* $\log_9 x = y$ *и получаваме*

$\frac{5y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow \frac{5y}{y-1} - \frac{3y}{y-1} + \frac{16y}{1+2y} = 2.$ $Д.М._y : \forall y \neq -\frac{1}{2}, 1$

$4y^2 + 2y + 16y^2 - 16y = 4y^2 - 2y - 2 \Rightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2};\; y_2 = \frac{1}{4}$

Тогава A) $\log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 3 \in Д.М.$

B) $\log_9 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \in Д.М.$

Бележка:

При преобразуванията на уравненията в Зад. 7 и Зад. 9 за смяна на основата сме използвали формула (6), а не (18), защото ДМ е положително число. Ако в ДМ се включваха и отрицателни числа, то задължително трябваше да използваме (18).

- Модулни уравнения

Зад. 13: $\lg|x - 1| = 1 - |\lg(x+2)|$

<u>Решение:</u>. ДМ: $\left| \begin{array}{l} x - 1 \neq 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$. Анулираме изразите под модул

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lg(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 10^0 \Leftrightarrow x = -1$. Разделяме ДМ на подинтервали и определяме знака на всеки модул. Резултатите са показани в долната таблица

$-2 \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$

x – 1	– – –	–	– –	0	+ + +
lg(x+2)	– – –	0	+ +	+	+ +

Разглеждаме следните случаи:

A) При $x \in (-2; -1)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg[-(x-1)] = 1 + \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(1-x) - \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow \lg\dfrac{1-x}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x+2} = 10^1 \Leftrightarrow$

$11x = -19 \Leftrightarrow x = -\dfrac{19}{11} \in (-2; -1) \Rightarrow x = -\dfrac{19}{11}$ *е решение*

B) При $x \in [-1; 1)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg[-(x-1)] = 1 - \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(1-x) + \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow (1-x)(x+2) = 10^1 \Leftrightarrow x^2 + x + 8 = 0$; $D = 1 - 32 < 0 \Rightarrow$ даденото уравнение няма решение при $x \in [-1; 1)$.

C) При $x \in (1; +\infty)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg(x-1) = 1 - \lg(x+2) \Leftrightarrow \lg(x-1) + \lg(x+2) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 10^1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$; $x_1 = -4 \notin (1; +\infty)$, $x_2 = 3 \in (1; +\infty) \Rightarrow$ даденото уравнение има решение $x = 3$

От A), B) и C) следва, че решенията на даденото уравнение са $x_1 = -\dfrac{19}{11};\quad x_2 = 3$

- Уравнения в които се използва формулата за смяна на основата във вида (15):

Зад. 14: $\log_{x+1}3 . \log_{2x+1}(x+1) + \log_{x+1}(x^2 - 2x + 6) . \log_{2x+1}(x+1) = 2$.

<u>Решение:</u>.
$$Д.М._x: \left|\begin{array}{l} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x+1>0 \\ 2x+1\neq 1 \\ x^2-2x+6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x\neq 0 \\ \forall x\ (\text{защото } D<0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$$

Преобразуваме даденото уравнение по следния начин: $[\log_{x+1}3 + \log_{x+1}(x^2 - 2x + 6)].\log_{2x+1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_{x+1}3(x^2 - 2x + 6).\log_{2x+1}(x+1) = 2$. Използваме формула (15) и получаваме $\log_{2x+1}(3x^2 - 6x + 18) = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 18 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 18 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 17 = 0$;
$x_1 = -5 - \sqrt{42} \notin ДМ$; $x_2 = \sqrt{42} - 5 \in ДМ$. Следователно $x = \sqrt{42} - 5$ е решение на даденото уравнение.

- Параметрични уравнения

Зад. 15: Да се реши уравнението $\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a\,|a + \log_a x| = a\log_x a$, където a е реален параметър.

<u>Решение:</u>. $Д.М._x: \left|\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$; $Д.М._a: \left|\begin{array}{l} a>0 \\ a\neq 1 \end{array}\right.$. На всички логаритми определяме основа a. $\log_a x + \dfrac{2}{\log_a x}|a + \log_a x| = \dfrac{a}{\log_a x} \Leftrightarrow \log_a^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0$. Полагаме $\log_a x = y$ и горното уравнение добива вида $y^2 + 2|a + y| - a = 0$ (C). Премахваме модула като разглеждаме два случая:

A) При $a + y < 0 \Leftrightarrow y < -a$, уравнение (C) добива вида $y^2 - 2(a+y) - a = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3a = 0$. Решенията му са $y_1 = 1 + \sqrt{1+3a}$; $y_2 = 1 - \sqrt{1+3a}$. Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (A):

1) $1 + \sqrt{1+3a} < -a \Leftrightarrow \sqrt{1+3a} < -a - 1$. За да е изпълнено това неравенство трябва да е изпълнено $-a - 1 > 0 \Leftrightarrow a < -1 \notin Д.М._a$. Следователно корена $y_1 = 1 + \sqrt{1+3a}$ не е решение на даденото уравнение.

2) $1 - \sqrt{1+3a} < -a \Leftrightarrow \sqrt{1+3a} > 1 + a$. Това неравенство се решава като решим следните две системи:

a) $\left|\begin{array}{l} 1+3a\geq 0 \\ 1+a\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\geq -\dfrac{1}{3} \\ a\leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \varnothing$

б) $\left|\begin{array}{l} 1+a>0 \\ \left(\sqrt{1+3a}\right)^2 > (1+a)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a>-1 \\ a^2-a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a>-1 \\ a\in(0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (0;1) \in Д.М._a$

От 1) и 2) следва, че при $a \in (0; 1)$ решението е $y = 1 - \sqrt{1+3a}$. Като заместим в полагането получаваме $\log_a x = 1 - \sqrt{1+3a} \Leftrightarrow x = a^{1-\sqrt{1+3a}}$

B) При $a + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -a$, уравнение (C) добива вида $y^2 + 2(a+y) - a = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + a = 0$. Решенията му са $y_1 = -1 + \sqrt{1-a}$; $y_2 = -1 - \sqrt{1-a}$. Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (B):

1) $-1 + \sqrt{1-a} \geq -a \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \geq 1 - a$. Разглеждаме следните две системи:

a) $\left|\begin{array}{l} 1-a\geq 0 \\ 1-a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow Н.Р.$

б) $\left|\begin{array}{l} 1-a\geq 0 \\ \left(\sqrt{1-a}\right)^2 \geq (1-a)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\leq 1 \\ a^2-a\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\leq 1 \\ a\in[0;1] \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (0;1) \in Д.М._a$

2) $-1 - \sqrt{1-a} \geq -a \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \leq a - 1 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1-a\geq 0 \\ a-1\geq 0 \\ \left(\sqrt{1-a}\right)^2 \leq (a-1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\leq 1 \\ a\geq 1 \\ a^2-a\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 1 \notin Д.М._a$

От 1) и 2) следва, че при $a \in (0; 1)$ решението е $y = -1 + \sqrt{1-a}$. Като заместим в полагането получаваме $\log_a x = \sqrt{1-a} - 1 \Leftrightarrow x = a^{\sqrt{1-a}-1}$

От А) и В) следва, че даденото уравнение при $a \in (0; 1)$ има две решения $x_1 = a^{\sqrt{1-a}-1}$; $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$, а при $a \in (1; +\infty)$ – няма решения.

Зад. 16: Намерете при кои стойности на параметъра a, уравнението $\frac{1}{2}\lg(ax) = \lg(x+1)$ има точно едно решение.

<u>Решение:</u>. $Д.М._x: \left| \begin{array}{l} x+1>0 \\ ax>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x>-1 \\ ax>0 \end{array} \right.$. Решаваме даденото уравнение

$\lg(ax) = 2\lg(x+1) \Leftrightarrow \lg(ax) = \lg(x+1)^2 \Leftrightarrow ax = (x+1)^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - (a-2)x + 1 = 0 \quad (C)$. Даденото уравнение, за да има точно едно решение, то за уравнение (C) имаме следните случаи:

А) $\left| \begin{array}{l} D=0 \\ x>-1 \\ ax>0 \end{array} \right.$. $D = (a-2)^2 - 4 = a^2 - 4a = 0$; $a_1 = 0$, $a_2 = 4$. При $a_1 = 0$ не е изпълнено $ax>0$, следователно $a_1 = 0$ не е решение на даденото уравнение. При $a_1 = 4$ даденото уравнение има вида $\frac{1}{2}\lg(4x) = \lg(x+1)$ и има точно един корен $x = 1$, следователно $a_1 = 4$ е решение на даденото уравнение.

В) Уравнение (C) има две решения, но единият корен е по-малък от – 1, т.е. числото – 1 е между двата корена. Това е възможно, когато е изпълнено $1.f(-1) < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (-1)(a-2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 + a - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow a < 0$

От А) и В) следва, че даденото уравнение има точно едно решение при $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

- Графично решаване

Зад. 17: $\log_2 x = 3 - x$.

<u>Решение:</u>.ДМ: $x > 0$. Лявата страна на даденото уравнение е растяща логаритмична функция (защото основата 2 > 1), а дясната – намаляваща функция. Следователно двете функции ще се пресичат само в една точка (може и да не се пресичат) т.е. решението (ако има такова) на даденото уравнение е само едно. С непосредствена проверка установяваме, че $x = 2$ е корен на уравнението.

III. Логаритмични неравенства

Неравенство, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично неравенство, т.е. неравенство от вида $\log_a f(x) > b$, където $f(x) > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b \in R$.

Решаването на логаритмични неравенства се свежда до решаването на неравенства от следните два вида:

Бележка:

> Както всички неравенства, така и логаритмичните, започват да се решават със задължително намиране на ДМ.

1) Неравенство от вида $\log_a f(x) < b$, където $Д.М.: \left| \begin{array}{l} f(x)>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{array} \right.$ (19)

Решаването му зависи от вида на основата:

- Ако $0 < a < 1$, то имаме $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b$, (20)
  т.е. знакът на неравенството се променя;
- Ако $a > 1$, то имаме $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) < a^b$, (21)
  т.е. знакът на неравенството се запазва;

2) Неравенство от вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, където $Д.М.: \left| \begin{array}{l} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{array} \right.$ (22)

Решаването му зависи от вида на основата:

- Ако $0 < a < 1$, то имаме $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, (23)
  т.е. знакът на неравенството се променя;
- Ако $a > 1$, то имаме $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, (24)
  т.е. знакът на неравенството се запазва;

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

- Неравенство от вида (19)

Зад. 18: $\log_2(x+3) - \log_2(2x-1) > 5 - \log_3 9$.

Решение:. $Д.М.: \begin{cases} x+3>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Преобразуваме даденото неравенство използвайки свойствата на логаритмите и получаваме $\log_2\frac{x+3}{2x-1}>3$.

Основата е 2 > 1 и прилагаме (21)

$\log_2\frac{x+3}{2x-1}>3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1}>2^3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1}-8>0 \Leftrightarrow \frac{x+3-16x+8}{2x-1}>0 \Leftrightarrow (11-15x)(2x-1)>0 \Leftrightarrow$

$x\in\left(\frac{1}{2};\frac{11}{15}\right)\in Д.М.$

Зад. 21: $x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>\frac{1}{x}$

Решение:.ДМ: x > 0.

I начин

Логаритмуваме двете страни на даденото неравенство при основа 3 и преобразуваме $\log_3 x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>\log_3\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[2-\log_3^2 x-2\log_3 x\right].\log_3 x>-\log_3 x$

Полагаме $\log_3 x = y$ и получаваме $(2-y^2-2y).y+y>0 \Leftrightarrow y(y^2+2y-3)<0$
$\Leftrightarrow y\in(-\infty;-3)\cup(0;1)$. Разглеждаме следните случаи:

А) $y\in(-\infty;-3)$, тогава от полагането следва $\log_3 x<-3 \Leftrightarrow x<3^{-3} \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$.

В) $y\in(0;1)$, тогава от полагането следва $\begin{cases}\log_3 x>0 \\ \log_3 x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3^0 \\ x<3^1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)$.

От А) и В) получаваме крайните решения $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup(1;3)$.

II начин

Преобразуваме до $x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>x^{-1}$. Имаме показателно неравенство с основа зависеща от неизвестното, затова разглеждаме следните случаи:

А) $\begin{cases} 0<x<1 & (1) \\ 2-\log_3^2 x-\log_3 x^2<-1 & (2)\end{cases}$

2) $2-\log_3^2 x-2\log_3 x<-1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+2\log_3 x-3>0$. Полагаме $\log_3 x = y$ и получаваме квадратното неравенство $y^2+2y-3>0$. Решенията му са $y\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. От полагането получаваме:

а) При $y<-3 \Rightarrow \log_3 x<-3 \Leftrightarrow x<\frac{1}{27}$. Засичаме с (1) и получаваме решенията $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$

б) При $y>1 \Rightarrow \log_3 x>1 \Leftrightarrow x>3 \notin (0;1)$.

От а) и б) следва, че в този случай даденото неравенство има решение $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$

В) $\begin{cases} x>1 \\ 2-\log_3^2 x-\log_3 x^2>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_3^2 x+2\log_3 x-3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\in\left(\frac{1}{27};3\right)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)$

Обединяваме решенията от (А) и (В), т.е. $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup(1;3)$

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".