Учебен център “СОЛЕМА”
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Модулни и ирационални уравнения и неравенства

I. Модулни уравнения и неравенства

1. Модул (абсолютната стойност)

Модулът (абсолютната стойност) на едно число може да бъде: $|a| = a$, ако $a \geq 0$ и $|a| = -a$, ако $a \leq 0$. От това определение $\Rightarrow |a| \geq 0$.

2. Модулни уравнения

Нека уравнението да е от вида $|f(x)| = g(x)$ (I.1), където $f(x)$ е произволна функция, а $g(x)$ е или число или функция. Например: $|x - 4| = 2x + 4$, или $|2 - 3x| = 8$. От казаното в т.1 следва, че решенията на (I.1) зависят от знака на $g(x)$:

- Ако $g(x) < 0$, то (I.1) няма решение;
- Ако $g(x) \geq 0$, то (I.1) има решение.

Има два начина за решаване на модулни уравнения:

Алгебричен метод

Удобно е този метод да се прилага, когато $g(x) = c$ е положително число. В такъв случай уравнението (I.1) е $|f(x)| = c$, където c е число. (I.2)

Решаваме го по следните начини:

1) Повдигаме двете му страни на квадрат и решаваме полученото уравнение;
2) Уравнението (I.2) се свежда до решаването на две уравнения:

$f(x) = c$ или $f(x) = -c$ (I.3)

Например: $|x - 1| = 4$

Начин 1: $(|x-1|)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Начин 2: $x - 1 = 4 \Rightarrow x_1 = 5$ или $x - 1 = -4 \Rightarrow x_1 = -3$

Метод на интервалите:

Може да се прилага при всички модулни уравнения. Удобно е да използваме следното правило:

Правило:

Стъпка A: Решаваме уравнението $f(x) = 0$, за всеки от модулите, участващи в уравнението (I.1). Нека да предположим, че решението на горното уравнение е x_0.
Стъпка B: Определяме знаците на всеки от модулите вляво и вдясно от x_0. Ако модулите са повече от един, добре е тези резултати да нанесем в таблица.
Стъпка C: Накъсваме дефиниционната област (Д.М.) на подинтервали, като нанесем числата x_0 и определяме подинтервала отляво да е затворен, а отдясно – отворен (когато лявата страна е $-\infty$ или число, непринадлежащо на Д.М., интервалът отляво не се затваря).
Стъпка D: Решаваме уравнението (I.1) във всеки от подинтервалите като заместим модулите със знаците от таблицата и проверяваме дали получените решения принадлежат на разглеждания подинтервал. Отпадат тези, които не принадлежат.
Стъпка E: Обобщаваме всички решения.

Запомнете:

$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$ (I.4)
$|f(x)|^2 = |f^2(x)| = f^2(x)$ (I.5)

Основни типове задачи

Зад. 1: $|x - 3| + |3x + 1| = 10$

Решение:

Стъпка A: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$; $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Стъпки B и C:

$-\infty$ – 1/3 3 $+\infty$

x – 3	–	–	–	–	–	–	0	+	+	+	
3x + 1	–	–	–	0	+	+	+	+	+		

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$: $-(x-3)-(3x+1)=10 \Rightarrow -x+3-3x-1=10 \Rightarrow x=-2$

$-2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x=-2$ е решение на даденото уравнение.

2) При $x \in \left[-\frac{1}{3}, 3\right)$: $-(x-3)+(3x+1)=10 \Rightarrow -x+3+3x+1=10 \Rightarrow x=3$, но

$3 \notin \left[-\frac{1}{3}, 3\right) \Rightarrow x=3$ не е решение на даденото уравнение.

3) При $x \in [3, +\infty)$: $(x-3)+(3x+1)=10 \Rightarrow x-3+3x+1=10 \Rightarrow x=3$

$3 \in [3, +\infty) \Rightarrow x=3$ е решение на даденото уравнение.

Стъпка E: От 1), 2) и 3) следва, че решенията на даденото уравнения са: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

Зад.2: $|x^2 - 2x - 3| = |2x - 5| + 1$

Решение:

Стъпка A: $2x-5=0 \Rightarrow x=2{,}5$; $x^2-2x-3=0$; $D=1+3=4 \Rightarrow \sqrt{D}=2$; $x_1=1+2=3$ и $x_2=1-2=-1$

Стъпки B и C:

	$-\infty$	-1		$2{,}5$		3	$+\infty$
x^2-2x-3	+ + +	0	− −	−	− −	0	+ +
$2x-5$	− − −	−	− −	0	+ +	+	+ +

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x \in (-\infty, -1)$: $x^2-2x-3=-(2x-5)+1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Само $x_2=-3$ е решение на даденото уравнение.

2) При $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right)$: $-(x^2-2x-3)=-(2x-5)+1 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Само $x_1=1$ е решение на даденото уравнение.

3) При $x \in \left[\frac{5}{2}; 3\right)$: $-(x^2-2x-3)=2x-5+1 \Rightarrow x^2-7=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{7} \\ x_2 = -\sqrt{7} \end{cases}$

Само $x_1=\sqrt{7}$ е решение на даденото уравнение.

4) При $x \in [3; +\infty)$: $x^2-2x-3=2x-5+1 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2+\sqrt{3} \\ x_2 = 2-\sqrt{3} \end{cases}$

Само $x_1=2+\sqrt{3}$ е решение на даденото уравнение.

Стъпка E: От 1), 2), 3) и 4) следва, че решенията на нашето уравнения са: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3=\sqrt{7}$ и $x_4 = 2+\sqrt{3}$.

3. Модулни неравенства

Решават се по подобни начини, както и модулните уравнения.

Бележка:

Ако имаме неравенството $|f(x)| < c$, където $c > 0$ е число, то може да се реши и по системата $\begin{cases} f(x) < c \\ f(x) > -c \end{cases}$. (I. 6)

Ако имаме неравенството $|f(x)| > c$, където $c > 0$ е число, то могат да се решат следните две неравенства $f(x) > c$ и $f(x) < -c$ (I. 7)

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 3: $|x^2-2x-3|-2 > |2x-1|$

Решение:

Стъпка A: $2x-1=0 \Rightarrow x=0{,}5$;

$x^2-2x-3=0$; $D=1+3=4 \Rightarrow \sqrt{D}=2$; $x_1=1+2=3$ и $x_2=1-2=-1$

Стъпки B и C:

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

	$-\infty$ …	-1	…	$0{,}5$	…	3	… $+\infty$
x^2-2x-3	+ + +	0	− − −	−	−	0	+ +
$2x-1$	− − −	−	− −	0	+ +	+	+ +

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x\in(-\infty;-1)$: $x^2-2x-3-2>-(2x-1)\Rightarrow x^2-6>0\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt6\right)\cup\left(\sqrt6;+\infty\right)$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x\in\left(-\infty;-\sqrt6\right)$.

2) При $x\in\left[-1;\frac12\right)$:

$-\left(x^2-2x-3\right)-2>-(2x-1)\Rightarrow x^2-4x<0\Rightarrow x(x-4)<0\Rightarrow x\in(0;4)$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x\in\left(0;\frac12\right)$.

3) При $x\in\left[\frac12;3\right)$: $-\left(x^2-2x-3\right)-2>2x-1\Rightarrow x^2-2<0\Rightarrow x\in\left(-\sqrt2;\sqrt2\right)$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x\in\left[\frac12;\sqrt2\right)$.

4) При $x\in[3;+\infty)$:

$x^2-2x-3-2>2x-1\Rightarrow x^2-4x-4>0\Rightarrow x\in\left(-\infty;2-2\sqrt2\right)\cup\left(2+2\sqrt2;+\infty\right)$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x\in\left(2+2\sqrt2;+\infty\right)$.

Стъпка E: От 1), 2), 3) и 4) следва, че решенията на даденото неравенство са: $x\in\left(-\infty;-\sqrt6\right)\cup\left(0;\sqrt2\right)\cup\left(2+2\sqrt2;+\infty\right)$.

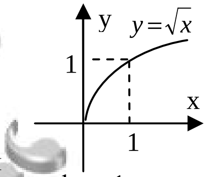
II. Ирационални уравнения и неравенства

1. Ирационална функция

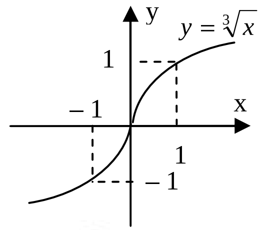
Всяка функция f(x), която се намира под знака на корен ,се нарича ирационална. Например: $y=\sqrt{f(x)}$

Ирационалната функция има следните свойства:

- *Свойство 1:*
  - При четен коренен показател подкоренната функция изпълнява неравенството f(x) ≥ 0 т.е. ДМ: x∈[0; +∞);
  - При нечетен коренен показател подкоренната функция f(x) може да бъде както положителна, така и отрицателна, т.е. ДМ: ∀x



фиг. 1



фиг. 2

- *Свойство 2:* Когато коренният показател е четно число, графиката на ирационалната функция е само в I квадрант (фиг. 1). Ако коренният показател е нечетно число, графиката на ирационалната функция е симетрична спрямо началото на координатната система (фиг. 2).

Запомнете:

$\sqrt{f(x)}\geq 0$		II.1
$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=f(x)$	при f(x) ≥ 0	II.2
$\sqrt{\left(f(x)\right)^2}=\lvert f(x)\rvert$	за всяко x	II.3

- *Свойство 3:* Независимо от коренния показател, ирационалната функция е растяща, като най-голямата (max f(x)) и най-малката стойност се намират от:

$$\min_{x\in Д.М.} y=\sqrt{\min_{x\in Д.М.} f(x)},\qquad \max_{x\in Д.М.} y=\sqrt{\max_{x\in Д.М.} f(x)} \qquad (II.4)$$

Зад. 1: Да се намери най-голямата стойност на функцията $y=\sqrt{-x^2+6x+7}$

Решение: Функцията y е ирационална. Полагаме $f(x)=-x^2+6x+7$ и от Свойство 1 определяме ДМ: $-x^2+6x+7\geq 0\Rightarrow x\in[-1;7]$. Функцията f (x) е квадратна ⇒ графиката и е парабола. Коефициентът пред x^2 е отрицателен ⇒ параболата f (x) е с върха нагоре ⇒ f (x) има максимум в точката $-\frac{b}{2a}$. Максималната и стойност е:

$\max_{x\in[-1;7]} f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(-\frac{6}{-2}\right)=f(3)=-3^2+6.3+7=16$. Най-голямата стойност на y намираме, използвайки (II.4): $\max_{x\in[-1;7]} y=\sqrt{16}=4$.

2. Ирационални уравнения

Ирационалните уравнения имат вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$, (II.5)
където f(x) и g(x) също могат да съдържат радикали. Пълното ДМ на (II.5) е

$$\left|\begin{array}{l} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{array}\right. \quad \text{(II. 13)}$$

Както за всяко уравнение, така и за ирационалното намирането на ДМ не е задължително. Затова, когато системата (II. 13) е сложна, може да не се решава, но след решаването на уравнение (II.5) получените корени се проверяват.

Бележка:

Както знаем от Свойство 1 и 2 (Фиг. 1 и Фиг. 2), (II. 13) ще е ДМ само когато имаме четен коренен показател. Ако коренният показател е нечетно число, то f(x) и g(x) могат да бъдат както положителни, така и отрицатели, т.е. ДМ на ирационално уравнение с нечетен коренен показател е ∀x

Има два начина за решаване на ирационални уравнения:

Правила:

<u>*I правило:*</u>

Стъпка 1: Ако в (II. 5) имаме корен квадратен, без да търсим ДМ повдигаме двете му страни на квадрат и решаваме полученото уравнение.
Стъпка 2: Непосредствено проверяваме кои от тях са корени и на (II.5).

<u>*II правило:*</u>

Уравнението (II.5) се свежда до решаване на системата $\left|\begin{array}{l} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{array}\right.$ (II.6)

Бележка:

1. Ако в уравнението има няколко корена, то *Стъпка 1* в *I правило* се повтаря докато остане само един корен.
2. Неравенството в системата (II.6) определя непълното ДМ на (II.5). Понякога е по-удобно това неравенство да не се решава. То се използва само , за да проверим кои корени на уравнението в система (II.6) са “чужди” (появяването на “чуждия” корен се обуславя от повдигането на квадрат).

Зад. 2: $\sqrt{10-x} = x+2$

<u>Решение:</u>

<u>Начин 1 (прилагаме *I Правило*):</u> Без да намираме ДМ повдигаме на квадрат двете страни на даденото уравнение: $10 - x = (x + 2)^2 \Leftrightarrow 10 - x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$; D = 25 + 24 = 49 $\Rightarrow \sqrt{D} = 7;\ x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6,\ x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$. Непосредствено проверяваме кои от тези корени са решение на даденото уравнение:

А) *За* $x = -6$ *имаме* $\sqrt{10+6} = -6+2 \Leftrightarrow \sqrt{16} = -4 \Leftrightarrow 4 = -4$. Равенството не е вярно, т.е. x = – 6 не е решение.
В) *За* $x = 1$ *имаме* $\sqrt{10-1} = 1+2 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$. Равенството е вярно, т.е. x = 1 е решение.

От А) и В) следва, че даденото уравнение има само едно решение x = 1.

<u>Начин 2 (прилагаме *II Правило*):</u>

$$\left|\begin{array}{l} x+2 \ge 0 \\ 10-x = (x+2)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \ge -2 \\ x^2+5x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \in [-2;+\infty) \\ x_1 = 1;\ x_2 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$$

<u>Начин 3 (използваме системата (II.6), но не решаваме неравенството в нея):</u>

Отбелязваме g(x) = x + 2. Повдигаме на квадрат даденото уравнение и получаваме $10 - x = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = -6$. Сега проверяваме, кои от тези решения изпълняват неравенството от системата (II.6). $g(1) = 1+2 = 3 > 0 \Rightarrow x = 1$ е решение на даденото уравнение; $g(-6) = -6 +2 = -4 < 0 \Rightarrow x = -6$ не е решение на даденото уравнение.

<u>Начин 4 (намираме пълното ДМ):</u>

Д.М.: $\left|\begin{array}{l} 10-x \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x \le 10 \\ x \ge -2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2;10]$. Повдигаме двете страни на даденото уравнение на квадрат: $10 - x = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \in$ ДМ и $x_2 = -6 \notin$ ДМ $\Rightarrow$ само x = 1 е решение.

Основни типове задачи:

- Задачи при които подкоренната величина е точен квадрат. Те се свеждат до решаване на модулно уравнение:

Зад. 3: $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{4x^2-32x+64} = 9$

<u>Решение:</u> Не намираме Д.М., а преобразуваме горното уравнение по следния начин: $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{4(x-4)^2}=9 \Rightarrow |x-3|+|x-2|+2|x-4|=9$. Решенията на това модулно уравнение са $x_1 = 1$ и $x_2 = 5,5$. Чрез непосредствена проверка в ирационалното уравнения проверяваме, че и двете числа са решения. Следователно решенията на нашата задача са: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5,5$.

- Задачи, при които подкоренната величина се допълва до точен квадрат. Те се свеждат до решаване на модулно уравнение:

Зад. 4: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

В подкоренната величина прибавяме и изваждаме 1:

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}+1-1}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}+1-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1}-$
$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|-\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2$

Подмодулната величина на първия модул е винаги положителна, защото: $\sqrt{x-1}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=-1$ и от (II.1) следва, че това уравнение няма решение, т.е $\sqrt{x-1}+1>0$ за $\forall x$. Затова $\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\sqrt{x-1}+1$ и горното модулно уравнение се преобразува в следното: $\sqrt{x-1}+1-\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2$. Решаваме го като първо намираме Д.М.: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow$ Д.М.: $x \in [-1; +\infty)$. Анулираме израза под знака на модула: $\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$. Накъсваме Д.М. на следните подинтервали:

A) Нека $x \in [-1; 2)$. От $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ определяме интервала $x \in (1; 2)$. В този интервал имаме $\sqrt{x-1}-1<0$ и решаваме уравнението:
$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \notin [-1; 2)$ $\Rightarrow$ в този интервал даденото уравнение няма решение.

B) Нека $x \in [2;\ +\infty)$, тогава имаме $\sqrt{x-1}-1>0$ и решаваме уравнението:
$\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2 \Leftrightarrow 0x=0 \Leftrightarrow \forall x \in [2; +\infty)$ е решение.

Обединяваме решенията от A) и B) $\Rightarrow$ Решенията на модулно уравнения са $x \in [2;\ +\infty)$. Това са всички решения и на даденото ирационално уравнение.

Бележка:

Зад. 4 може да се реши и чрез полагането $\sqrt{x-1}=y \Rightarrow x=y^2+1$

- Чрез полагане:

Зад. 5: $2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+4}=26$

<u>Решение:</u> Прибавяме от двете страни на горното уравнение 4 и получаваме: $2x^2+x+4+\sqrt{2x^2+x+4}=30$. Полагаме: $\sqrt{2x^2+x+4}=y$. Като отчетем (II.1), за y намираме ДМ$_y$: $y \geq 0$. От полагането получаваме $2x^2 + x + 4 = y^2$, и заместваме в нашето уравнение получаваме: $y^2 + y - 30 = 0$; $y_1 = 5 \in$ ДМ$_y$, $y_2 = -6 \notin$ ДМ$_y$. Тогава: $\sqrt{2x^2+x+4}=5$. ДМ: $\forall x$ (защото за неравенството $2x^2 + x + 4 > 0$ имаме $a = 2 > 0$ и $D < 0$). Повдигаме на квадрат двете страни: $2x^2 + x + 4 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -3,5$. Това са и решенията на дадената задача.

- Уравнения съдържащи корени с различен показател:

Зад. 6: $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-5}=3$

<u>Решение:</u> ДМ: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Правим полагането: $(A): \left|\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=u, \forall u \geq 0\\ \sqrt[3]{x-5}=v, \forall v\end{array}\right.$ и

решаваме системата: $\left|\begin{array}{l}x-2=u^2\\ x-5=v^3\\ u+v=3\end{array}\right.$. Решаваме първите две уравнения чрез събиране:

$\left|\begin{array}{l}x-2=u^2\\ x-5=v^3.(-1)\end{array}\right. \Rightarrow + \left|\begin{array}{l}x-2=u^2\\ -x+5=-v^2\end{array}\right. \Rightarrow u^2-v^3=3 \Rightarrow u=\sqrt{3+v^3}$ и заместваме в третото уравнение:

$\sqrt{3+v^3}+v=3 \Leftrightarrow \sqrt{3+v^3}=3-v \Leftrightarrow 3+v^3=9-6v+v^2 \Leftrightarrow \left(v^3-v^2\right)+6v-6=0 \Leftrightarrow (v-1)\left(v^2+6\right)=0$.

Това уравнение има само едно решение $v = 1$ (защото $v^2 + 6 = 0$ няма решение). Понеже не сме намерили ДМ$_v$ трябва да проверим дали $v = 1$ е решение:
$\sqrt{3+v^3}=3-v \Rightarrow \sqrt{3+1^2}=3-1 \Leftrightarrow \sqrt{4}=2 \Leftrightarrow 2=2$. Равенството е вярно, т.е. $v = 1$ е решение. Тогава $u=\sqrt{3+v^3} \Leftrightarrow u=\sqrt{3+1} \Leftrightarrow u=2$. Заместваме в (A) и получаваме:
$\sqrt[3]{x-5}=1 \Leftrightarrow x-5=1^3 \Leftrightarrow x=6$. Това е и решението на даденото уравнение.

- Уравнения, съдържащи корени в знаменател:

Зад. 7: $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

<u>Решение:</u> ДМ: $3x-2>0 \Rightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ и превеждаме двете страни под общ знаменател: $x^2-3x+2=(1-x)\sqrt{3x-2}$. Лявата страна е квадратна функция, която има корени $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Затова горното уравнение добива вида:
$(x-1)(x-2)=(1-x)\sqrt{3x-2} \Rightarrow (x-1)(x-2)+(x-1)\sqrt{3x-2}=0 \Rightarrow (x-1)\left(x-2+\sqrt{3x-2}\right)=0$.

Решенията на това уравнения са:

A) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in$ ДМ;

B) $x-2+\sqrt{3x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=2-x$, където $g(x) = 2 - x \Rightarrow 3x - 2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 2 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. При $x_1 = 6$ имаме $g(6) = 2 - 6 = -4$

$< 0 \Rightarrow x_1 = 6$ не е решение на уравнението В). При $x_2 = 1$ имаме $g(1) = 2 - 1 = 1 > 0$ $\Rightarrow x_2 = 1$ е решение на уравнението В).

От А) и В) следва, че $x = 1$ е решение на даденото уравнение.

- Ирационални уравнения, съдържащи параметър:

Бележка:

Стандартният вид на параметричното уравнение е:

коефициент $*$ X = израз (II.7)

Решава се като се разгледат следните два случая:

А) коефициент = 0. Тогава в зависимост от видът на израз разглеждаме следните два подслучая:

1) ако израз = 0,то решенията на (II.7) са $\forall x$;

2) ако израз ≠ 0, то уравнението (II.7) няма решения

В) коефициент ≠ 0. Тогава решенията са: $x = \dfrac{\textit{израз}}{\textit{коефициент}}$ (II.8).

Зад. 8: Да се реши уравнението $\sqrt{x^2 + ax - 2x} = x + 1$, където a е реален параметър.

Решение: Първо решаваме ирационалното уравнение по *II Правило* (II.6). Затова $g(x) = x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (А) и повдигаме на квадрат $\left(\sqrt{x^2 + ax - 2x}\right)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + ax - 2x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (a-4)x = 1$. Разглеждаме следните два случая:

В) Ако $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$, уравнението има следния вид: $0.x = 1$ т.е. при $a = 4$ параметричното уравнение няма решение.

С) Ако $a - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$, параметричното уравнение има решение $x = \dfrac{1}{a-4}$.

Сега трябва да проверим кои от тези решения са действителни решения на даденото уравнение като заместим в А):

$$x \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{a-4} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + a - 4}{a-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a-3}{a-2} \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$$

От В) и С) следва, че:

При $a \in (-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$, задачата има едно решение $x = \dfrac{1}{a-4}$.

При $a \in (3; 4]$, задачата няма решение.

3. Ирационални неравенства

Неравенство, при което неизвестното е под корен, се нарича ирационално. За разлика от уравненията решаването на ирационалните неравенства започва с намирането на ДМ

Основните ирационални неравенства са: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (II.9)

или $\sqrt{f(x)} > g(x)$, (II.10)

където $f(x)$ и $g(x)$ също могат да съдържат радикали.

Неравенство (II.9) се решава по следния начин

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{array} \right. \quad \text{(II.11)}$$

Бележка:

Първите две неравенства в горната система определят ДМ

Неравенство (II.10) се решава като се решат двете системи:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{array} \right. \quad \text{(II.12)}$$

Съществува общ начин за решаване на уравнения от вида (II.9) и (II.10):

Общо правило:

Стъпка A: Намираме ДМ;
Стъпка B: Преобразуваме неравенството така, че едната страна да не съдържа корен (например: дясната страна). Означаваме тази страна например с ψ (x);
Стъпка C: Разделяме ДМ на две по следните начини:
C.1: Решаваме неравенството ψ (x) < 0 (ако в (II.9) и (II.10) имаме строги неравенства, то тук разглеждаме ψ (x) ≤ 0) като по този начин намираме нова $ДМ_1$. Ако имаме неравенството $\sqrt{f(x)} < -$, то нашето неравенство няма решение в $ДМ_1$, ако имаме неравенството $\sqrt{f(x)} > -$, то решенията на нашето неравенство са ∀x ∈ $ДМ_1$;
C.2: Решаваме неравенството ψ (x) ≥ 0 (ако в (II.9) и (II.10) имаме строги неравенства, то тук разглеждаме ψ (x) > 0) като по този начин намираме нова $ДМ_2$. Повдигаме на квадрат нашето неравенство и го решаваме. Получените решения засичаме с $ДМ_2$;
Обединяваме решенията, получени от *C.1.* и *C.2.*

Бележка:

Както при ирационални уравнения, така и при ирационални неравенства, затруднения създава повдигането на двете страни на неравенството, само когато степента е четна, защото тогава се получават неравенства, които не са еквивалентни. Затова, ако имаме уравнение или неравенство, съдържащо корен с нечетен показател, за решаването му трябва да повдигнем двете му страни на съответната степен, без да изследваме знака на ψ (x).

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 9: $\sqrt{x^2-6x+9}-1<\sqrt{x^2}$

Решение: Подкоренните величини са точен квадрат, затова ирационално неравенство се свежда до решаването на модулно неравенство: $\sqrt{(x-3)^2}-1<\sqrt{x^2} \Rightarrow |x-3|-1<|x|$. Разглеждаме следните интервали:

A) Нека $x \in (-\infty;0)$, тогава |x – 3| = – (x – 3) и |x| = – x и горното неравенство се преобразува по следния начин: $-(x-3)-1<-x \Rightarrow -x+3-1<-x \Rightarrow 0.x<-2 \Rightarrow H.P.$, т.е. в този интервал даденото неравенство няма решение.
B) Нека $x \in [0;3)$, тогава |x – 3| = – (x – 3) и |x| = x и горното неравенство се преобразува по следния начин: $-(x-3)-1<x \Rightarrow -x+3-1<x \Rightarrow 2x>2 \Rightarrow x>1$, т.е. в този интервал даденото неравенство има решение x ∈ (1; 3).
C) Нека $x \in [3;+\infty)$, тогава |x – 3| = (x – 3) и |x| = x и горното неравенство се преобразува по следния начин: $(x-3)-1<x \Rightarrow x-3-1<x \Rightarrow 0.x>-4 \Rightarrow \forall x$, т.е. в този интервал даденото неравенство има решение $x \in [3;+\infty)$.

От A), B) и C) следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in (1;+\infty)$.

Зад. 14: $\sqrt{x^2-3x+2}>x-4$

Решение: Ще решим задачата по двата начина:

Начин 1: Прилагаме Общото правило за решаване на ирационални неравенства:

A) ДМ: $x^2-3x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.
B) Неравенството не се нуждае от преобразуване, затова означаваме ψ (x) = x – 4.
C) Разглеждаме следните два случая:

C.1) Когато ψ (x) = x – 4 ≤ 0 ⇔ x ≤ 4, нова дефиниционна област (в която дясната страна е отрицателна) е $ДМ_1$: $\begin{cases} x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \\ x \in (-\infty;4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;1] \cup [1;4]$. В случая имаме $\sqrt{x^2-3x+2} > -$. ⇒ Даденото неравенство има решение за $x \in (-\infty;1] \cup [1;4]$;

C.2) Когато ψ (x) = x – 4 > 0 ⇔ x > 4, новата дефиниционна област (в която дясната страна е положителна) е: $ДМ_2$: $\begin{cases} x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \\ x \in (4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4;+\infty)$. Повдигаме двете страни на неравенство B) на квадрат: $x^2-3x+2>x^2-8x+16 \Leftrightarrow x>\frac{14}{5}$. Засичайки ги с $ДМ_2$, стигаме до извода, че решенията са: $x \in (4;+\infty)$.

Обединяваме решенията C.1) и C.2), от което следва, че решенията на даденото неравенство са: $x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

Начин 2): Даденото неравенство е от вида (II.10). Затова $f(x) = x^2 - 3x + 2$ и g(x) = x – 4. Прилагаме системите (II.12): $\begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x-4 \le 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-4>0 \\ x^2-3x+2>x^2-8x+16 \end{cases}$.

Първата система отбелязваме с A), а втората с B). Решаваме A):

$\begin{vmatrix} x^2-3x+2\ge 0 \\ x-4\le 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty) \\ x\le 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[2;4]$. Решаваме и В):

$\begin{vmatrix} x-4>0 \\ 5x>14 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x\in(4;+\infty)$. Обединяваме решенията от системи А) и В) и получаваме решението на даденото уравнение: $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Бележка:

От разгледаните примери се вижда, че Общото правило за решаване на ирационални неравенства е удобно да се прилага, когато в неравенството има повече от един корен (Зад. 12 и Зад. 13) или е параметрично (Зад. 15). Системите (II. 11) и (II. 12) е удобно да се прилагат, когато в неравенството има само един корен (Зад. 14).

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".