

Показателни уравнения и неравенства

I. Показателна функция

Функция от вида $y = a^x$, където a е положително число различно от 1, а x – променлива се нарича показателна функция $\Rightarrow y = a^x$,

$$\text{ДМ: } \begin{cases} a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ \forall x \end{cases} \quad (1).$$

При $a = 1$ показателната функция е равна на 1 (защото $y = 1^x = 1$ за $\forall x$).

Затова при $a = 1$, графиката на показателната функция е права линия успоредна на абсцисната ос и минаваща през точка с координата $a(0; 1)$.

При $a > 1$ показателната функция има графика показана на Фиг.1.

При $0 < a < 1$ показателната функция има графика показана на Фиг.2.

От графиката на показателната функция следват свойства:

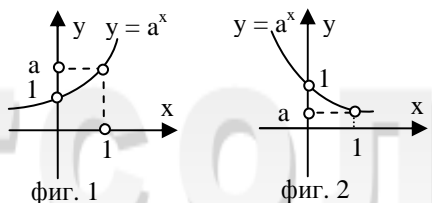
- ◆ **СВОЙСТВО 1** – Графиката на функцията минава през точките с координати: $(0; 1)$ и $(1; a)$ т.е. $a^0 = 1$ и $a^1 = a$;
- ◆ **СВОЙСТВО 2** – Графиката е разположена в I и II квадрант ("над" оста Ox) т.е. $a^x > 0$ за $\forall x$;
- ◆ **СВОЙСТВО 3** – Ако $a \in (0; 1)$, то функцията $y = a^{f(x)}$ е намаляваща, като:
 - При $x < 0$ стойностите на показателната функция са по-големи от 1, т.е. $a^x > 1$;
 - При $x > 0$ – са по-малки от 1, т.е. $0 < a^x < 1$;
 - Най-голямата и най-малка стойност на функцията в даден интервал

$$[p; q] \text{ се намира от } \begin{cases} \min_{x \in [p; q]} y = a^{\max_{x \in [p; q]} f(x)} \\ \max_{x \in [p; q]} y = a^{\min_{x \in [p; q]} f(x)} \end{cases} \quad (2).$$

- ◆ **СВОЙСТВО 4** – Ако $a \in (1; +\infty)$, то функцията $y = a^{f(x)}$ е растяща, като:

$a > 1$		
x	0	1
$y = a^x$	1	a

$0 < a < 1$		
x	0	1
$y = a^x$	1	a



- При $x < 0$ стойностите на показателната функция са по-малки от 1 т.е. $0 < a^x < 1$;
- При $x > 0$ – са по-големи от 1 т.е. $a^x > 1$;
- Най-голямата и най-малка стойност на функцията в даден интервал

$$[p; q] \text{ се намира от } \begin{cases} \min_{x \in [p; q]} y = a^{\min_{x \in [p; q]} f(x)} \\ \max_{x \in [p; q]} y = a^{\max_{x \in [p; q]} f(x)} \end{cases} \quad (3).$$

- ◆ Показателната функция $y = a^x$ няма най-малка и най-голяма стойност.
- ◆ **СВОЙСТВО 5** – Всяка права "над" оста Ox и успоредна на нея пресича графиката на функцията $y = a^x$ само в една точка, а всяка права "под" оста Ox няма обща точка с графиката на функцията $y = a^x$.

Зад. 1: Да се намери най-голямата стойност на функцията $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{x^2 - 4x + 6}$

Решение: Преобразуваме функцията: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2 - 12x + 18}$. Тази функция е пока-

зателна с основа $a = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < a < 1$, т.е. функцията y е намаляваща. Нека степенният

показател да означим с $f(x) = 3x^2 - 12x + 18$. ДМ: $\forall x$ (защото $a = 3 > 0$). От **СВОЙСТВО**

2 следва, че за да решим задачата трябва да намерим $\max_{\forall x} y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\min_{\forall x} f(x)}$. Функция-

та $f(x)$ е квадратна \Rightarrow графиката и е парабола, $a = 3 > 0 \Rightarrow$ параболата е с върха надолу. От **Свойство 3** на квадратна функция от Уроци "Квадратни уравнения и Неравенства" следва, че най-малката и стойност е в точката $-\frac{b}{2a}$ т.е:

$$\min_{\forall x} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 18 = 6. \text{ Тогава } \max_{\forall x} y = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow \max_{\forall x} y = \frac{1}{3^6}.$$

2. Показателни уравнения

Уравнение, в което неизвестното е в степенния показател, се нарича показателно уравнение.

Основни показателни уравнения:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b, \text{ където } a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad (4).$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ ако } a > 0, a \neq 1 \quad (5).$$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow \log_a (a^{f(x)}) = \log_a (b^{g(x)}), \text{ ако } a, b > 0 \text{ и } a, b \neq 1 \quad (6).$$

Запомнете:

При показателните уравнения, уравненията $y = 0^0$ и $y = 0$, са в неопределена форма.

7

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

- ◆ Уравнения с равни основи:

$$\text{Зад. 1: } \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x-3,5} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Решение: Горното уравнение се преобразува като използваме (5):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^3 - \frac{2x}{4x-2x} - 3,5 = 0,5 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \cup x^2+2x+2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\text{Но } x^2+2x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 > 0 \\ D=1-2=-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x. \text{ Следователно решенията на да-$$

деното уравнение са $x=2$.

- ◆ Уравнение от вида (4):

$$\text{Зад. 3: } 3^{4x+2} = 7$$

Решение: То се решава като логаритмуваме двете му страни при подходяща основа (не забравяйте, че уравнение от вида (4) има решение, само когато $b > 0$):

$$\log_3 3^{4x+2} = \log_3 7 \Rightarrow (4x+2)\log_3 3 = \log_3 7 \Rightarrow 4x+2 = \log_3 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(2 + \log_3 7)$$

- ◆ Уравнения от вида:

$$Aa^x + Bb^x = 0 \quad (15).$$

Това уравнение се решава като разделим двете му страни с a^x или b^x :

$$\text{Зад. 4: } 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$$

Решение:

$$4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4^x}{3^x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\sqrt{64}}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{4^3}}{3^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

- ◆ Уравнения от вида: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$

Това уравнение е квадратно спрямо a^x . Решава се чрез полагането: $a^x = y$, където $y > 0$, и решаваме полученото квадратно уравнение спрямо y . След това разглеждаме само положителните корени на y .

$$\text{Зад. 7: } 2^{2(x^2-x)-3} = 1 + 2^{x^2-x-2}$$

Решение:

$$2^{2(x^2-x)-3} = 1 + 2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{2^{2(x^2-x)}}{2^3} - \frac{2^{x^2-x}}{2^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(2^{x^2-x}\right)^2 - 2 \cdot 2^{x^2-x} - 8 = 0}_8$$

полагаме: $2^{x^2-x} = y$; $Д.М. y$: $y > 0$ и от горното уравнение получаваме:

$$y^2 - 2y - 8 = 0; D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = 3; \begin{cases} y_1 = -2 \notin Д.М. y. \\ y_2 = 4 \in Д.М. y. \end{cases}$$

Запомнете:

Тук използваме свойствата:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad 8$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad 9$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad 10$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad 11$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad 12$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad 13$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad 14$$

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

И от полагането получаваме: $2^{x^2-x} = 2^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

◆ Уравнения от вида: $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ (17).

Това уравнение се решава като разделим двете му страни с a^{2x} или b^{2x} .

Зад. 9: $5^{2x^2-6x+2} = 2^{2x^2-6x+2} - 21 \cdot 10^{x^2-3x}$

Решение:

$$5^2 \cdot 5^{2x^2-6x} = 2^2 \cdot 2^{2x^2-6x} - 21 \cdot 10^{x^2-3x} \Rightarrow 25 \cdot 5^{2(x^2-3x)} + 21 \cdot 5^{x^2-3x} \cdot 2^{x^2-3x} - 4 \cdot 2^{2(x^2-3x)}.$$

Делим двете страни на $2^{2(x^2-3x)}$: $25 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2(x^2-3x)} + 21 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x} - 4 = 0$. Полагаме:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x} = y; \text{ Д.М.}_y, : y > 0 \Rightarrow 25y^2 + 21y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \notin \text{Д.М.}_y \\ y_2 = \frac{4}{25} \in \text{Д.М.}_y \end{cases}, \text{ от полагането:}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x} = \frac{4}{25} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

◆ Уравнения от вида (6):

Това уравнение се решава като логаритмуваме двете му страни при основа а или b:

Зад. 10: $3 \cdot 2^x = 5 \cdot 7^{2x}$

Решение: Логаритмуваме при основа 2 и за решаването на полученото уравнение използваме свойствата на логаритмите:

$$\log_2(3 \cdot 2^x) = \log_2(5 \cdot 7^{2x}) \Rightarrow \log_2 3 + \log_2 2^x = \log_2 5 + \log_2 7^{2x} \Rightarrow \log_2 3 +$$

$$+ x \cdot \log_2 2 = \log_2 5 + 2x \cdot \log_2 7 \Rightarrow x - 2x \cdot \log_2 7 = \log_2 5 - \log_2 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(1 - 2 \log_2 7) = \log_2 \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{\log_2 \frac{5}{3}}{\log_2 2 - \log_2 7^2} \Rightarrow x = \frac{\log_2 \frac{5}{3}}{\log_2 \frac{2}{49}}$$

◆ Уравнение при което в основата и в степенния показател имаме неизвестно, т.е. от вида: $f(x)^{g(x)} = f(x)^{q(x)}$, (18)

където $f(x)$, $g(x)$ и $q(x)$ са функции на x

То се решава като се разгледат следните четири случая:

А) Когато $f(x) = -1$ т.е. заместяваме основата с -1 , и решаваме уравнение (18). Ако се получи вярно равенство, то получената стойност за x е решение на уравнението;

В) Когато $f(x) = 0$, повтаряме по-горе описаната процедура;

С) Когато $f(x) = 1$, повтаряме по-горе описаната процедура;

Д) Сега вече сме сигурни, че $f(x)$ е различно от горните стойности, затова решаваме показателното уравнение (18)

Обединяваме решенията получени от А), В), С) и Д).

Зад. 11: $(x+2)^{x^2} = (x+2)^{x+1}$

Решение: Разглеждаме следните случаи:

А) $x+2 = -1 \Rightarrow x = -3$. Заместваме в условието и получаваме:

$$(-1)^{(-3)^2} = (-1)^{-3+1} \Leftrightarrow (-1)^9 \neq (-1)^{-2} \Leftrightarrow x = -3 \text{ не е решение.}$$

В) $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Заместваме в условието и получаваме:

$$0^{(-2)^2} = 0^{-2+1} \Leftrightarrow 0^4 \neq 0^{-1} \Leftrightarrow x = -2 \text{ не е решение.}$$

С) $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$. Заместваме в условието и получаваме:

$$1^{(-1)^2} = 1^{-1+1} \Leftrightarrow 1 = 1^0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ е решение.}$$

Д) Уравнението е от вида (1.5), затова можем да запишем:

$$x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

От А), В), С) и Д) $\Rightarrow x_1 = -1$ и $x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ са всички решения.

◆ Графично решаване – Графично се решават показателни уравнения в които неизвестното се съдържа, както в степенен показател, така и в свободен вид:

Зад. 13: $3^x = 1 - x$

Решение: Отчитайки (4), определяме ДМ: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$. Нека лявата страна означим с функцията $f(x) = 3^x$, а дясната страна – $g(x) = 1 - x$. Ако построим графиката на двете функции се вижда, че $f(x)$ е растяща, а $g(x)$ – намаляваща. Затова, очевидно, двете функции ще се пресичат в една точка, т.е. дадената задача има едно решение. Непосредствено проверяваме, че $x = 0$ е решение, защото $3^0 = 1 - 0 \Rightarrow 1 = 1$. Ще докажем, че уравнението не притежава друг корен:

А) Нека $x < 0$, тогава: $0 < f(x) < 1$, а $g(x) > 1$, т.е. уравнението няма корен в интервала $(-\infty; 0)$.

В) Нека $x > 0$, тогава: $f(x) > 1$, а $g(x) < 1$, т.е. уравнението няма корен в интервала $(0; +\infty)$.

От А) и В) следва, че $x = 0$ е единственото решение на задачата.

◆ Параметрични уравнения

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

Зад. 15: Намерете стойностите на параметъра a , за които уравнението $9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} - 1 + 2a = 0$ има точно едно решение.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение по следния начин:

$$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 18a - 9 = 0. \text{ Полагаме } 3^x = y, \text{ където Д.М.у: } y > 0 \text{ и уравнението доби-}$$
$$\text{ва вида } y^2 - 12y + 18a - 9 = 0 \quad (22)$$
$$\text{(нека общия вид на квадратното уравнение е } Ay^2 + By + C = 0) \quad (23)$$

Първи начин:

Решаваме (22) и от решенията определяме търсените стойности на параметъра. Разглеждаме следните случаи :

А) $D = 0 \Rightarrow D = 36 - 18a + 9 = 45 - 18a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$. Тогава коренът на горното

уравнение е $y = 6 \in \text{ДМ}_y$, т.е. при $a = \frac{5}{2}$ даденото уравнение има едни корен.

В) При $D > 0$ корените са два:

1) $y_1 = 6 - \sqrt{45 - 18a}$. За да принадлежи на ДМ_y той трябва да е положителен, т.е. решаваме:

$$6 - \sqrt{45 - 18a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{45 - 18a} < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 45 - 18a \geq 0 \\ 45 - 18a < 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{5}{2} \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$$

2) $y_2 = 6 + \sqrt{45 - 18a}$. За да принадлежи на Д.М.у той трябва да е положителен

т.е. решаваме: $6 + \sqrt{45 - 18a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{45 - 18a} > -6 \Leftrightarrow \forall a \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$

От А) и В) следва, че:

При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ уравнението има един корен y_2 .

При $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ уравнението има два корена y_1 и y_2 .

При $a = \frac{5}{2}$ уравнението има един корен $y_1 = y_2$.

При $a \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ уравнението няма решение.

От тук получаваме, че при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ даденото уравнение има един ко-

рен.

Втори начин:

Не решаваме уравнение (22), а използваме формулите на Виет. Като отчетем полагането (ДМ_y : $y > 0$) и изискването даденото показателно уравнение да има едно решение, то следва, че уравнение (22) трябва да има само един положителен корен (а другият корен или не съществува или е отрицателен или нула). Затова разглеждаме следните случаи:

А) За уравнение (23), ако $A = 0$, то ще има един корен от вида $y = -\frac{C}{B} > 0$

За уравнение (22) тази стъпка не се изпълнява, защото A не зависи от параметъра.

В) При $A \neq 0$ уравнение (23) има един положителен корен, ако $\begin{cases} D = 0 \\ y = -\frac{B}{2A} > 0 \end{cases} \quad (24)$

Затова в нашия случай получаваме: $\begin{cases} D = 45 - 18a = 0 \\ y = 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

С) При $A \neq 0$ уравнение (23) има един положителен корен, а другият е отрицателен или нула, ако $\begin{cases} D > 0 \\ y_1 \cdot y_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \leq 0$.

За нашия случай използвайки формулите на Виет можем да запишем

$$2a - 1 \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}.$$

От А), Б) и С) следва, че при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$ уравнението има един корен.

Трети начин:

Този начин е свързан с разпределение на корените на уравнение (22) върху числовата ос. От ДМ_y следва, че числото 0 се намира между корените на (22). Затова в него полагаме $f(x) = y^2 - 12y + 18a - 9$ и разглеждаме два случая:

А) Уравнение (22) има един положителен корен. За целта решаваме система (24) и получаваме: $a = \frac{5}{2}$.

В) Уравнение (22) има два корена, от които само единият е положителен, т.е. единият корен да принадлежи на интервала $(0; +\infty)$ а другият да е извън него (От урока "Разп-

ределение на корените на квадратно уравнение и квадратно неравенство" знаем, че число $\alpha \in (x_1; x_2)$, когато е изпълнено неравенството $A.f(\alpha) < 0$. (25)

В нашия случай ще имаме и равенство, защото един от корените може и да е 0 т.е: $1.f(0) \leq 0 \Rightarrow 18a - 9 \leq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

От А) и В) следва, че исканите решения са при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$

3. Показателни неравенства

Неравенство, в което неизвестното е в степенен показател, се нарича показателно неравенство.

Използвайки свойствата на показателната функция, можем да запишем следните основни неравенства:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{при } a > 1 \\ f(x) > g(x) & \text{при } 0 < a < 1 \end{cases} \quad (27)$$

Основни типове задачи:

Основните типове неравенства са същите, както и основните типове уравнения с тази разлика, че при неравенства се използва (27), а не от (4) до (6).

Зад. 19: $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Решение: Преобразуваме неравенството по следния начин:

$$3^x \cdot \sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} > 4^x \cdot \sqrt{4} - \frac{4^x}{2} \Leftrightarrow 3^x \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 4^x \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} > 4^x \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^x}{4^x} > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{64}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас“.