

Системи уравнения и Редици

Системи уравнения

I. Системи уравнения от първа степен с две неизвестни

Решават се чрез:

1. Заместване – Решават се по следния начин:
 - a) от едното уравнение се изразява едното неизвестно;
 - b) замества в другото уравнение и го решаваме;
 - c) намерената стойност на неизвестното се замества в израза от a).

2. Събиране – Решават се по следния начин:

a) умножаваме едното уравнение (или двете уравнения) с подходящо число така, че след събирането им едното неизвестно да се съкрати (най-често това са коефициентите пред неизвестното, което искаме да съкратам, но с обратен знак);

- b) събираме двете уравнения и решаваме полученото уравнение;
- c) полученото неизвестно се замества в едно от уравненията на системата.

Например:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad | \cdot (-3) \\ 3x + 7y = 2 \quad | \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y = -3 \\ 6x + 14y = 4 \end{cases} \Rightarrow 17y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{17}; 2x - \frac{1}{17} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{9}{17}$$

Решението е двойката числа: $\left(\frac{9}{17}; \frac{1}{17}\right)$

II. Системи уравнение от втора степен с две неизвестни

Теорема 1:

При замяна на кое да е уравнение от една система с еквивалентно уравнение се получава еквивалентна система.

Например: $\begin{cases} x - y = 1 \quad | \cdot (-1) \\ 2x^2 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x^2 - y = 4 \end{cases}$

Теорема 2:

Ако едното уравнение в дадена система S е еквивалентно на две уравнения, то дадената система S е еквивалентна на две системи S_1 и S_2 , във всяка от които едното уравнение е заменено с едното еквивалентно уравнение, а другото остава същото.

Например: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y) \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$

Тази система се разделя на две системи: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \quad (1)$

и $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \quad (2)$

Те се решават по описаните по-долу начини.

В математиката универсален начин за решаване на системи от този вид не са познати. Възможно е да се използват подходящи методи за решаване на определени групи системи. Тези групи са следните:

- ◆ Ако едното уравнение в системата е от първа степен, а другото е от втора степен – От уравнението от първа степен изразяваме едното неизвестно и го замества във второто уравнение. След решаването му намираме стойностите на второто неизвестно. Система от този тип е системата (1):

$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (-y)^2 + y^2 = 7 \Leftrightarrow 2y^2 = 7 \Leftrightarrow y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}; x_{\frac{1}{2}} = \mp\sqrt{\frac{7}{2}}$$

- ◆ Ако неизвестните в системата участват чрез едни и същи симетрични изрази. Най-често тези изрази са: $x + y$; $x \cdot y$; $x - y$; $x^2 - y^2$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$ и т.н. Те-

зи изрази се полагат като нови неизвестни и най-напред се решава получената за тях система.

Зад. 1: Да се реши системата уравнения: $x^2 + y^2 + x + y = 14$ и $x^2 + y^2 + xy = 7$

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

Решение: Тази система се решава, като в лявата страна на първото уравнение прибавим и извадим едно и също число $2xy$, а във второто уравнение – прибавим и извадим число xy :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2xy + x + y = 14 \\ x^2 + 2xy + y^2 - xy = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + (x+y) = 14 \\ (x+y)^2 - xy = 7 \end{cases}$$

Полагаме: $\begin{cases} x+y=u \\ x,y=v \end{cases} \Rightarrow$ Тогава: $\begin{cases} u^2 + u - 2v = 14 \\ u^2 - v = 7 \Rightarrow v = u^2 - 7 \end{cases} \Rightarrow u^2 + u - 2(u^2 - 7) = 14 \Leftrightarrow u(1-u) = 0$

Оттук следва, че $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. и съответно $v_1 = -7$ и $v_2 = -6$. Разглеждаме следните два случая:

A) $\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow x=-y \\ x,y=-7 \end{cases} \Rightarrow -y \cdot y = -7 \Leftrightarrow y^2 = 7 \Leftrightarrow y_{1/2} = \pm\sqrt{7}; x_{1/2} = \mp\sqrt{7}$

B) $\begin{cases} x+y=1 \Rightarrow x=1-y \\ x,y=-6 \end{cases} \Rightarrow y(1-y) = -6 \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases} \cap \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Окончателните решения на дадената система са двойката числа:

$$\left(\pm\sqrt{7}; \mp\sqrt{7}\right); (-2; 3); (3; -2)$$

- ♦ Ако неизвестните участващи в уравненията са само от втора степен: Чрез подходящи преобразувания от двете уравнения получаваме уравнение от първа степен, което заедно с едно уравнение на дадената система образуват еквивалентна система.

Зад. 2: Да се реши системата уравнения: $2x^2 - 4y^2 - 1,5x + y = 0$ и $3x^2 - 6y^2 - 2x + 2y = 0,5$

Решение: Тази система се преобразува, като първото уравнение се умножи с 3, а второто – с (-2) и получаваме:

$$\begin{cases} 6x^2 - 12y^2 - 4,5x + 3y = 0 \\ -6x^2 + 12y^2 + 4x - 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x - y = -1 \Leftrightarrow x + 2y = 2 \cdot \text{Така полученото уравнение}$$

заедно с второто уравнение от дадената система образуват нова система:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x^2 - 6y^2 - 2x + 2y = 0,5 \end{cases} \cdot \text{Решаваме я чрез заместване и получаваме следните решения}$$

за дадената система: $\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(-3; \frac{5}{2}\right)$

- ♦ Системи, в които едно уравнение е хомогенно, а другото е произволна функция.

Определение 1:

Степен на едночлен се намира като съберем степените на неизвестните.

Например: Едночлена $3xy$ е от втора степен, а едночлена x^2y е от трета степен

Определение 2:

Многочлен, в който всички едночлени са от една и съща степен, се нарича хомогенен многочлен (хомогенна функция).

Например: Функцията $x^2 + xy + y^2$ е хомогенна, защото всички едночлени са от втора степен. Функцията $x^3 + 2x^2y + y^3$ е хомогенна, защото всички едночлени са от трета степен.

Определение 3:

Уравнение, лявата страна на което е хомогенна функция, а дясната е равна на нула, се нарича хомогенно уравнение.

Например: Уравнението $x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$ е хомогенно от втора степен, а уравнението $x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = 0$ е хомогенно от трета степен, но уравнението $x^2 - 2xy + 3y = 0$ не е хомогенно, защото третият едночлен не е от втора степен.

Нека да имаме системата
$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

където $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, са произволни числа, а $f(x, y)$ е произволна функция. Тя се решава по следния алгоритъм:

Правило 1:

1. Пресмятаме $f(0,0)$, т.е. допускаме, че $y=0$, заместваме във второто уравнение и ако получим, че и $x=0$, то $x=0$ и $y=0$ са решения на дадената система. Ако получим, че $x \neq 0$, то x и y не може едновременно да са нули т.е $x \neq 0$ или $y \neq 0$.

2. Разделяме хомогенното уравнение на y^2 (или x^2) и получаваме:

$$a \frac{x^2}{y^2} + b \frac{x}{y} + c = 0. \text{ Полагаме } \frac{x}{y} = z \text{ и получаваме квадратно уравнение спрямо } z$$

т.е. $az^2 + bz + c = 0$. Нека z_1 и z_2 са корените му. Тогава система (3) се разпада

на следните две системи: $\begin{cases} \frac{x}{y} = z_1 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{x}{y} = z_2 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$. Решенията им са решения и

на дадената система.

- ◆ Системи уравнения, при които и в двете уравнения левите страни са хомогенни функции, а десните има числа са различни от нула, се решават, като въведем ново неизвестно, което е равно на отношението между двете неизвестни в системата. Например:

Зад. 4: Да се реши системата уравнения: $3x^2 - 2xy + y^2 = 36$ и $5x^2 - 4xy + y^2 = 20$

Решение: Полагаме $y = t \cdot x$ и получаваме системата $\begin{cases} 3x^2 - 2tx^2 + t^2x^2 = 36 \\ 5x^2 - 4tx^2 + t^2x^2 = 20 \end{cases}$. Делим

двете уравнения и получаваме:

$$\frac{3x^2 - 2tx^2 + t^2x^2}{5x^2 - 4tx^2 + t^2x^2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2(3 - 2t + t^2)}{x^2(5 - 4t + t^2)} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 5(3 - 2t + t^2) = 9(5 - 4t + t^2) \Leftrightarrow 2t^2 - 13t + 15 = 0. \text{ Ре-}$$

шенията му са: $t_1 = 5$ и $t_2 = 1,5$. Разглеждаме следните две системи:

A) $\begin{cases} y = 5x \\ 5x^2 - 4xy + y^2 = 20 \end{cases}$. Решаваме я чрез заместване. Решенията и са наредената двойка

числа $(\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}; -5\sqrt{2})$.

B) $\begin{cases} y = \frac{3x}{2} \\ 5x^2 - 4xy + y^2 = 20 \end{cases}$. Решаваме я чрез заместване. Решенията и са наредената двойка

числа $(4; 6)$ и $(-4; -6)$.

Решенията на A) и B) са решения и на дадената система.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 5: Да се реши системата уравнения: $\frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1$ и $x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22$

Решение: В дадената система участват симетрични изрази, затова полагаме

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ \frac{x}{y} = v \end{cases} \text{ и получаваме системата } \begin{cases} \frac{3}{u-1} + \frac{2}{v} = 1 \\ u + 4v = 22 \end{cases}$$

и го заместваме в първото уравнение:

$$\frac{3}{21-4v} + \frac{2}{v} = 1 \Leftrightarrow 3v + 42 - 8v = 21v - 4v^2 \Leftrightarrow 2v^2 - 13v + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_2 = 3,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_2 = 8 \end{cases}$$

даме следните два случая:

A) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$. Решението и е двойката числа: $(3; 1)$ и $(-1; -3)$.

B) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \frac{x}{y} = 3,5 \end{cases}$. Решението и е двойката числа: $\left(14\sqrt{\frac{2}{53}}; 4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$ и $\left(-14\sqrt{\frac{2}{53}}; -4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$.

Решенията на дадената система са двойките числа от A) и B).

Зад. 9: Да се реши системата уравнения: $x^{2y+5} = 27$ и $9x^{y-1} = 1$

Решение: Коренуваме двете страни на второто уравнение:

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{x^{y-1}} = 1 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{x^{y-1}}} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^{1-y}} \text{ и заместваме във първото:}$$

$$x^{2y+5} = 3^3 \Leftrightarrow x^{2y+5} = (\sqrt{x^{1-y}})^3 = x^{\frac{3(1-y)}{2}} \Leftrightarrow 2y+5 = \frac{3-3y}{2} \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow 3 = \sqrt{x^{1+1}} \Leftrightarrow x = 3$$

Решенията на дадената система е наредената двойка числа $(3; -1)$.

Зад. 10: Дадена е системата уравнения: $y - x = a(1 + xy)$ и $2xy + x + y + 1 = 0$. За кои стойности на параметъра a системата има само едно решение? (УНСС, 1992)

Решение: Преобразуваме системата по следния начин:

$$\begin{cases} y - x = a + ax \cdot 2 \\ 2xy + x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2ax + 2y - 2x = 2a \\ 2ax + ay + ax = -a \end{cases} + \Leftrightarrow (2+a)y + (a-2)x = a$$
 Това уравнение заедно с второто уравнение от дадената система образуват нова система, която е еквивалентна на дадената:

$$\begin{cases} (2+a)y + (a-2)x = a \\ 2xy + x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Тази система ще има единствено решение в следните три случая:

А) Когато коефициентът пред едното неизвестно е нула, т.е. $a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$, тогава от първото уравнение получаваме $x = -\frac{1}{2}$ и заместваем във второто уравнение, за да

получим другото неизвестно: $y = -\frac{3}{4}$

В) Когато коефициентът пред другото неизвестно е нула, т.е. $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$, тогава от първото уравнение получаваме $y = \frac{1}{2}$ и заместваем във второто уравнение, за да

получим другото неизвестно: $x = -\frac{3}{4}$

С) В случаите, когато коефициентите пред неизвестните в първото уравнение на система (6) са различни от нула, можем да решим системата чрез заместване. От първото уравнение изразяваме x и заместим във второто:

$$\frac{2ya - 2y^2(2+a)}{a-2} + \frac{a-(2+a)y}{a-2} + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (a+2)y^2 - (a-2)y - (a-1) = 0$$
 Това уравнение има само едно решение когато $D=0$: $D=(a-2)^2 + 4(a+2)(a-1) = 5a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

От А), В) и С) следва, че при $a = \pm 2 \cap a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ дадената система има само едно решение.

Редици

Нека да имаме естествените числа 1, 2, ..., n и на всяко от тях да съпоставим произведението му с числото 3. Така получаваме следната редица от числа 3, 6, 9, ..., 3n. т.е.

1	2	3	4	...	n	
↓	↓	↓	↓	...	↓	·
3	6	9	12		3n	
↓	↓	↓	↓		↓	
f(1)	f(2)	f(3)	f(4)		f(n)	

Определение 1:

Множеството от числа (или отсечки или др.) съпоставено по някакво правило на естествените числа 1, 2, ..., n, се нарича числова редица.

Членовете на редицата се отбелязват по следния начин: първият член с a_1 , вторият член – a_2 и т.н. до n -тият член – a_n . Числото a_n се нарича общ (n -ти) член на редицата. В горния пример общия член е зададен с помощта на формулата $a_n = 3n$. Ако една редица е зададена с формулата за общия си член, може да запишем редицата $\{a_n\}$ или в горния пример $\{3n\}$.

I. Видове редици:

- ◆ Крайни: когато се знае последният им член;
- ◆ Безкрайни: редица, за която не се знае последният член.

II. Начини за задаване на редици:

- ◆ Чрез формулата на общия член (аналитично) – Например: Ако имаме $a_n = \frac{n+1}{n}$, редицата е $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \dots; \frac{n+1}{n}$;
- ◆ Словесно (описателно) – Например: на естествените числа съпоставяме простите числа 2, 3, 5, ...;
- ◆ С рекурентна зависимост – Задава се първият член a_1 и връзката между два съседни члена на редицата (т.е. задава се първият член и правилото за получаване на всеки следващ). Например: Ако $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + n$, редицата е 1, 3, 6, 10, ...

III. Монотонност:

- ◆ Растяща редица:

Определение 2:

Една редица е растяща (строго растяща), когато всеки неин член след първия е по-голям или равен на предходния, т.е. $a_{n+1} \geq a_n$. (за строго растяща редица имаме $a_{n+1} > a_n$).

- ◆ Намаляваща редица:

Определение 3:

Една редица е намаляваща (строго намаляваща), когато всеки неин член след първия е по-малък или равен на предходния, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$. (за строго намаляваща редица имаме $a_{n+1} < a_n$).

Всяка растяща или намаляваща редица се нарича монотонна.

От горните определения следва, че за да се докаже монотонността на редица достатъчно е да се изследва знака на разликата $a_{n-1} - a_n$. Ако тя е положителна – редицата е растяща, ако е отрицателна – редицата е намаляваща. В някои случаи е по-удобно да определим монотонност на редица като делим два съседни члена, т.е. образуваме частното $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ и ако то е по-голямо от 1, редицата е растяща, ако е по-малко от 1 редицата е намаляваща.

IV. Ограничена редица:

Определение 4:

Редицата е ограничена отгоре, ако съществува число ϵ , за което имаме изпълнено $a_n \leq \epsilon$, за всяко n .
Редицата е ограничена отдолу, ако съществува число ϵ , за което имаме изпълнено $a_n \geq \epsilon$ за всяко n .

Прогресии

I. Аритметична прогресия:

Определение:

Числова редица, в която всеки член след първия се получава като към предходния му се прибавя едно и също число d (което число се нарича разлика на аритметичната прогресия), т.е. $a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow d = a_{n+1} - a_n$.

От определението следва, че при $d > 0$ аритметичната прогресия е растяща, а при $d < 0$ – намаляваща.

Прието е аритметичната прогресия да се означава със знака \vdots .

Теорема:

Теорема 1 (за общия член): Ако имаме аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика d , то за всеки член n е в сила равенството: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Теорема 2 (за сумата на първите n члена): Нека да имаме аритметичната прогресия a_1, a_2, \dots, a_n , с разлика d , то сумата S_n на членовете a_1, a_2, \dots, a_n е $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Свойства:

Свойство 1: За три последователни члена на аритметичната прогресия е в сила равенството: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, т.е. всеки член без първия е средно аритметично на съседните му два члена.

Свойство 2: За коя да е аритметична прогресия са в сила равенствата: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1}$, т.е. сумата на два члена, равноотдалечени от крайните ѝ членове, е равно на сумата на двата крайни члена.

II. Геометрична прогресия:

Определение:

Числова редица, на която всеки член след първия се получава като предходният му се умножи с едно и също число q (което число се нарича частно на геометричната прогресия), т.е. $b_{n+1} = b_n \cdot q \Rightarrow q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, ако $b_n \neq 0$.

От определението следва, че при $q > 1$ геометричната прогресия е растяща, при $0 < q < 1$ – намаляваща, а при $q < 0$ – нито растяща нито намаляваща. Ако $q = 1$ – всички членове са равни, ако $q = 0$ и $a_1 \neq 0$ – всички членове след първия са равни на нула (например: 4, 0, 0, ...) ако $q = -1$ – прогресията се състои от една двойка противоположни числа (например: -2, 2, -2, 2, ...). Геометрични прогресии с $q = 0$ и $q = \pm 1$ не представляват интерес и затова полагаме, че $q \neq 0$ и $q \neq \pm 1$.

Прието е геометричната прогресия да се означава със знака \ddots .

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

Теорема:

Теорема 1 (за общия член): Ако имаме геометрична прогресия с първи член a_1 и разлика q , то за всеки член e в сила е равенството: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Теорема 2 (за сумата на първите n члена): Нека да имаме $\ddot{::} b_1, b_2, \dots, b_n$, с частно $q \neq 1$, то сумата S_n на членовете и е $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ или

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$. **БЕЛЕЖКА:** При $q > 1$ е удобно да се използват първите

части от горните формули, а при $q < 1$ – вторите части.

Теорема 3 (за произведението на първите n члена): Нека да имаме $\ddot{::} b_1, b_2, \dots, b_n$, с частно $q \neq 1$, то произведението Π_n на членовете и е $\Pi_n = b_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Теорема 4 (сума на безкрайно малка намаляваща $\ddot{::}$): Нека да имаме безкрайно малката намаляващата $\ddot{::} b_1, b_2, \dots, b_n \dots$, с частно $|q| < 1$, тогава $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Свойства:

Свойство 1: За три последователни члена на геометрична прогресия е в сила равенството: $b_k^2 = b_{k+1} \cdot b_{k-1}$, т.е. всеки член без първия е средно геометрично на съседните му два члена.

Свойство 2: За коя да е геометрична прогресия са в сила равенствата: $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1}$, т.е. произведението на два члена, равноотдалечени от крайните ѝ членове, е равно на произведението на двата крайни члена.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 4: Три числа, сборът на които е 42, образуват геометрична прогресия с частно, по-голямо от 1. Ако към първото прибавим 2, а от третото извадим 8, ще получим аритметична прогресия. Намерете числата.

Решение:

1 начин:

Нека трите числа на аритметичната прогресия да означим с $x-y$, x , $x+y$, тогава, имайки предвид условието (че от първото число на $\ddot{::}$ трябва да извадим 2, а към третото – да прибавим 8), търсените числа са $\ddot{::} x-y-2, x, x+y+8$. За тази прогресия отчитаме условието и Свойство 1 и получаваме системата:

$$\begin{cases} (x-y-2)+x+(x+y+8)=42 \Rightarrow x=12 \\ x^2=(x-y-2)(x+y+8) \end{cases} \Rightarrow 12^2=(10-y)(20+y) \Leftrightarrow y^2+10y-56=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=4 \\ y_2=-14 \end{cases}$$

Получихме следните две прогресии: $\ddot{::} 6, 12, 24$ и $\ddot{::} 24, 12, 6$. От определението за първата от тях намираме частно $q=2>1$, а за втората – $q=0,5<1$. По условие, частното трябва да е по-голямо от единица, следователно търсените числа са 6, 12, 24.

II начин:

Използвайки Следствие 1 за членовете на търсената геометрична прогресия, получаваме: $\ddot{::} b_1, b_1 q, b_1 q^2$, при ограничение за частното $q>1$. По условие за тези числа имаме $b_1+b_1 q+b_1 q^2=42$ (2). Също по условие за аритметичната прогресия имаме: $\ddot{::} b_1+2, b_1 q, b_1 q^2-8$. За тази прогресия прилагаме Свойство 1: $2b_1 q = (b_1+2) + (b_1 q^2-8) \Leftrightarrow b_1 q^2 - 2b_1 q + b_1 = 6$. Това уравнение и уравнение (2) образуват система:

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=42 \\ b_1(q^2-2q+1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1(1+q+q^2)}{b_1(q^2-2q+1)}=7 \Rightarrow 6q^2-15q+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_1=2>1 \\ q_2=\frac{1}{2}<1 \end{cases}; b_1=6$$

числа са: 6, 12, 24.

Зад. 6: От четири числа първите три образуват аритметична прогресия, а последните три – геометрична прогресия. Намерете числата, ако сборът на двете средни числа е 10, а сборът на двете крайни е 11.

Решение: Нека първото число е x , а второто число – y . Тогава търсените числа са: $x, y, 10-y, 11-x$. За членовете на прогресиите имаме:

1) $\ddot{::} x, y, 10-y$. От Теорема 1 следва: $2y=x+10-y \Leftrightarrow x=3y-10$.

2) $\ddot{::} y, 10-y, 11-x$. От Теорема 1 следва: $(10-y)^2=y(11-x) \Leftrightarrow y^2-31y+ux+100=0$.

Заместяваме x от (1) и след преобразуване уравнението добива вида $4y^2-41y+100=0$.

Решенията му са $y_1=4$ и $y_2=\frac{25}{4}$.

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

Заместваме в (1) и получаваме стойностите на другото неизвестно:

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = \frac{35}{4}. \text{ Тогава търсените числа са следните две редици от числа:}$$

$$2, 4, 6, 9; \text{ и } \frac{35}{4}, \frac{25}{4}, \frac{15}{4}, \frac{9}{4}.$$

Бележка:

За намиране сумата от квадратите на първите n члена на геометрична прогресия

$$\text{може да използваме формулата } S_n = a_1^2 \frac{(q^n)^2 - 1}{q^2 - 1} \quad (8)$$

Зад. 10: Да се намери за кои стойности на x числата $\lg 6, \lg(2^x + 1), \lg\left(2^x + \frac{1}{6}\right)$,

взети в този ред са последователни членове на аритметична прогресия.

Решение: Използвайки Свойство 1 на аритметичната прогресия, записваме:

$$\lg(2^x + 1) = \frac{\lg 6 + \lg\left(2^x + \frac{1}{6}\right)}{2} \Leftrightarrow 2\lg(2^x + 1) = \lg 6\left(2^x + \frac{1}{6}\right); \text{ Д.М.: } \forall x \text{ и } 2^x > 0$$

$$\lg(2^x + 1)^2 = \lg(6 \cdot 2^x + 1) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 6 \cdot 2^x + 1 \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(2^x - 4) = 0$$

$$1) 2^x = 0 \Rightarrow \text{Н.Р.}$$

$$2) 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

От 1) и 2) следва, че $x=2$ е решение на задачата.

Зад. 15: Намерете общия член на редица $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{\sqrt{5}}{26}, \frac{\sqrt{7}}{80}, \dots$

Решение: За да съставим формула за дадената редица, удобно е да разсъждаваме по следният начин:

- Знаците се сменят циклично започвайки с минус, затова в a_n трябва да има множител $(-1)^n$.
- В числител имаме нечетни числа, подредени във възходящ ред като в числител на втората дроб имаме корен, т.е. $\sqrt{2n-1}$.
- Знаменателите изпълняват връзката $3^n - 1$.

$$\text{В крайна сметка получихме } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{3^n - 1}.$$

Бележки:

1. Ако в редицата имаме циклично сменящи се знаци, започвайки с плюс, то във формулата за общия член трябва да има множител $(-1)^{n+1}$.
2. Ограничена редица от четни числа има общ член $a_n = 2n$, а от нечетни числа $a_n = 2n - 1$.

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас“.