Правоъгълен триъгълник

Бележка:

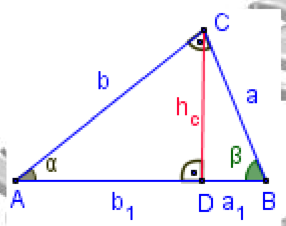
Навсякъде в долните формули се използват следните означения: AB=c, AC=b, BC=a, $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$, m_a, m_b, m_c – медиани към съответните страни; l_a, l_b, l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a, h_b, h_c – височини към съответните страни; r - радиуса на вписаната окръжност; R – радиус на описаната окръжност; P – периметър, S – лице.

I. Теоретични бележки

- Ако $\sphericalangle A=30^0$, то

  (1): $a=\frac{1}{2}c$

  и обратно, ако е изпълнено (1) следва, че $\sphericalangle A=30^0$.



Фиг.1

- Ако CC_1 е медиана към хипотенузата c, то

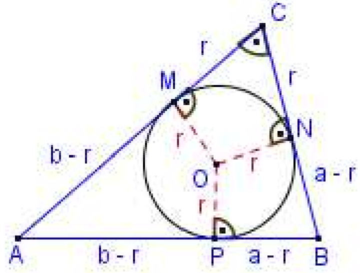
  (2): $CC_1=\frac{1}{2}c$

  и обратно, ако е изпълнено (2) следва, че CC_1 е медиана към хипотенузата.
- Питагорова теорема: $a^2+b^2=c^2$.
- Определяне вида на триъгълник:
  - Правоъгълен триъгълник – Ако $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \gamma=90^0$.
  - Тъпоъгълен триъгълник – Ако $a^2+b^2<c^2 \Leftrightarrow \gamma>90^0$.
  - Остроъгълен триъгълник – Ако $a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow \gamma<90^0$.
- Ако $CC_1=h_c$ е височина, а $AC_1=b_1$ и $BC_1=a_1$ са проекциите съответно на катетите b и a върху хипотенузата c (Фиг. 1), то

  (3): $a^2=c.a_1$; (4): $b^2=c.b_1$; (5): $h_c^2=a_1.b_1$;
  (6): $h.c=a.b$; (7): $c=2R$.
- Допирателни до окръжност:
  - Права AC е допирателна до окръжност тогава и само тогава, когато е перпендикулярна на радиуса r в общата точка на правата и окръжността (Фиг.2), т.е.

    Ако AC – допирателна до к $\Leftrightarrow$ AC $\perp$ r, където r = OM.
  - Допирателните от външна точка към окръжността са равни (Фиг. 2), т.е.

    Ако AM и AP – допирателни $\Rightarrow$ AM=AP.



Фиг.2

- Окръжност вписана в правоъгълен триъгълник:
  - Ако точките M и N са допирните точки на окръжността до правоъгълния ΔABC (Фиг.2), т. O – център на вписаната окръжност, а т. C – връх с прав ъгъл, то ONCM – квадрат, т.е. OM = ON = CM = CN = r.
  - За r имаме изпълнено (Фиг.2)

    (8): $r=p-c=\frac{a+b-c}{2}$.
- Тригонометрични функции (Фиг.1):

  (9): $\sin\alpha=\frac{a}{c}$; (10): $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; (11): $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; (12): $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{b}{a}$;
- Лице на правоъгълен триъгълник (Фиг. 1).

  (13): $S=\frac{a.b}{2}=\frac{c.h_c}{2}$.

II. Основни типове задачи:

Зад. 1: В правоъгълен триъгълник (Фиг. 1) при дадени два от елементите a, b, c, a_1, b_1, h_c, R, r, намерете всички останали:

а) $a_1=\sqrt{2}$, $b_1=2\sqrt{2}$; б) $a=1$, $b_1=\frac{3}{2}$;

в) $c=2$, $h_c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, при $a<b$; г) $r=2$, $R=5$;

Решение:

а)

- От (5) $\Rightarrow h_c^2=a_1.b_1=\sqrt{2}.2\sqrt{2}=4 \Rightarrow h_c=2$;

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

===

- От Питагорова теорема за $\Delta ADC \Rightarrow b^2 = b_1^2 + h_c^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$;
- От Питагорова теорема за $\Delta BDC \Rightarrow a^2 = a_1^2 + h_c^2 = (\sqrt{2})^2 + 4 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$;
- $c = a_1 + b_1 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$;
- От (7) $\Rightarrow R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$;
- От (8) $\Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

б) Нека $a_1 = x$.

- $c = b_1 + a_1 = \dfrac{3}{2} + x$
- От (3) $\Rightarrow a^2 = c.a_1 = \left(\dfrac{3}{2}+x\right)x \Rightarrow 1 = \left(\dfrac{3}{2}+x\right)x \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$; $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -2 < 0 \notin ДМ_x \Rightarrow a_1 = x_1 = \dfrac{1}{2}$;
- $c = a_1 + b_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$;
- От (5) $\Rightarrow h_c^2 = a_1.b_1 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow h_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- От Питагорова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$;
- От (7) $\Rightarrow R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$;
- От (8) $\Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

в) Нека $a_1 = x$, тогава $b_1 = c - a_1 = 2 - x$.

- От (5) $\Rightarrow h_c^2 = a_1.b_1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2-x)x \Rightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0$, $D = 4$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, т.е. $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_1 = \dfrac{3}{2}$. Тогава $b_1 = 2 - x = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ и $b_1 = 2 - x = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$;
- От Питагорова теорема за $\Delta ADC \Rightarrow b^2 = b_1^2 + h_c^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ и $b^2 = b_1^2 + h_c^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow b = 1$;
- От Питагорова теорема за $\Delta BDC \Rightarrow a^2 = a_1^2 + h_c^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ и $a^2 = a_1^2 + h_c^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow a = 1$;
- По условие $a < b \Rightarrow a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = \dfrac{3}{2}$;
- От (7) $\Rightarrow R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$;
- От (8) $\Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

г)

- От (7) $\Rightarrow c = 2R = 2.5 = 10$;
- От (8) $\Rightarrow r = \dfrac{a+b-c}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{a+b-10}{2} \Rightarrow a + b = 14 \Rightarrow$ (1): $a = 14 - b$;
- От Питагорова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100$ и от (1) $\Rightarrow (14-b)^2 + b^2 = 100 \Rightarrow b^2 - 14b + 48 = 0$, $D = 1$, $b_1 = 6$, $b_2 = 8$;
- Тогава от (1) $\Rightarrow a_1 = 14 - b_1 = 14 - 6 = 8$ и $a_2 = 14 - 8 = 6$;
- Страните са 6 cm, 8 cm и 10 cm;
- От (6) $\Rightarrow h_c.c = a.b \Rightarrow 10h_c = 6.8 \Rightarrow h_c = 4{,}8$ cm;
- Ако $a = 6$ cm, $b = 8$ cm от Питагорова теорема за $\Delta ADC \Rightarrow b^2 = b_1^2 + h_c^2 \Rightarrow 8^2 = b_1^2 + 4{,}8^2 \Rightarrow b_1^2 = 40{,}96 \Rightarrow b_1 = 6{,}4$ cm;
- От Питагорова теорема за $\Delta BDC \Rightarrow a^2 = a_1^2 + h_c^2 \Rightarrow 6^2 = a_1^2 + 4{,}8^2 \Rightarrow a_1^2 = 12{,}96 \Rightarrow a_1 = 3{,}6$ cm;

Зад. 2: Даден е правоъгълен триъгълник. Попълнете таблицата:

a	b	c	h_c	cos α	tg α	cotg α	sin β	cos β	tg β	cotg β
		10			$\dfrac{3}{4}$					
4								$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$		

<u>Решение:</u>

a) От (11) ⇒ $tg\,\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{b}$. Тогава a = 3x, b = 4x.

- От Питагорова теорема за ΔABC ⇒ $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (3x)^2 + (4x)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{25} \Rightarrow$ x = 2;
- a = 3x = 3.2 = 6, b = 4x = 4.2 = 8;
- От (6) ⇒ $h_c.c = a.b \Rightarrow 10h_c = 6.8 \Rightarrow h_c = 4{,}8$;
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cot g\alpha = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$
- $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \cot g\beta = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$

б) От (10) ⇒ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{4}{c} \Rightarrow c = 2\sqrt{13}.$

- От Питагорова теорема за ΔABC ⇒ $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4^2 + b^2 = (2\sqrt{13})^2 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$;
- От (6) ⇒ $h_c.c = a.b \Rightarrow 2\sqrt{13}\,h_c = 6.4 \Rightarrow h_c = \frac{12\sqrt{13}}{13}$;
- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}; \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}; tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}; \cot g\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{2};$
- $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}; tg\beta = \frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \cot g\beta = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$

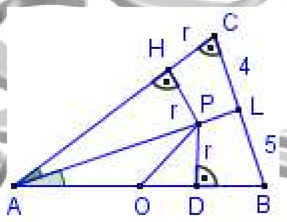
Зад. 3: Ъглополовящата на остър ъгъл на правоъгълен триъгълник дели срещулежащия катет на части равни на 5 cm и 4 cm. Намерете:

а) радиусите на описаната и вписаната окръжности;

б) разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжности.

<u>Решение</u>: a) BC = a = 4 + 5 = 9 cm.

- AL – ъглополовяща ⇒ $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ AB = c = 5x, AC = b = 4x;
- От Питагорова теорема за ΔABC ⇒ $BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 9^2 + (4x)^2 = (5x)^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$;
- AC = b = 4x = 12 cm, AB = c = 5x = 15 cm;
- От (7) ⇒ $R = \frac{c}{2} = \frac{15}{2}$ = 7,5 cm;



- От (8) ⇒ $r = \frac{9+12-15}{2}$ = 3 cm.

б) Нека т. O – център на описаната окръжност, а т. P – център на вписаната окръжност, тогава търсеното разстояние е OP, но PD = PH = r = 3 cm, AO = R = 7,5 cm.

- AH = AC – CH = 12 = 3 = 9 cm;
- т. D и т. H са допирните точки на окръжността съответно до страните AB и AC на триъгълника ⇒ AD = AH = 9 cm (от Теорема за допирателни до окръжност);
- OD = AO – AD = 9 – 7,5 = 1,5 cm;
- От Питагорова теорема за ΔODP ⇒ $OP^2 = OD^2 + PD^2 = 1{,}5^2 + 3^2 = 1{,}125 \Rightarrow$ $OP = 1{,}5\sqrt{5}$ cm.

Зад. 4: Хипотенузата AB на правоъгълния ΔABC се разделя от височината CD към нея на две части: AD = 16 cm и DB = 9 cm. Правата минаваща през върха B и средата M на CD пресича AC в точка E. Да се намери:

а) катетите на ΔABC;

б) височината от върха C в ΔEBC;

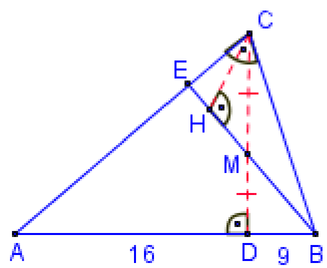
в) дължината на отсечката BE.

<u>Решение</u>: а)

- От (5) ⇒ $CD^2 = AD.BD = 16.9 \Rightarrow CD = 12$ cm;
- От Питагорова теорема за ΔDBC ⇒ $BC^2 = BD^2 + CD^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow$ $BC = 5\sqrt{5}$ cm. От Питагорова теорема за ΔADC ⇒ $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 16^2 + 12^2 = 400 \Rightarrow AC = 20$ cm.

б)

- т. M – среда на CD ⇒ $DM = CM = \frac{1}{2}CD \Rightarrow$ DM = CM = 6 cm;
- От Питагорова теорема за ΔDBM ⇒ $BM^2 = DM^2 + BD^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow BM = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ cm;
- ΔHMC ~ ΔDMB (по I признак, защото ∢H = ∢D = 90^0 и ∢HMC = ∢DMB – като връхни ъгли) ⇒ $\frac{HM}{DM} = \frac{CM}{BM} \Rightarrow \frac{HM}{6} = \frac{6}{3\sqrt{13}} \Rightarrow HM = \frac{12}{\sqrt{13}}$ и освен това $\frac{CH}{DB} = \frac{CM}{BM} \Rightarrow \frac{CH}{9} = \frac{6}{3\sqrt{13}} \Rightarrow CH = \frac{18}{\sqrt{13}}$ cm.



в) $BH = BM + HM = 3\,3\sqrt{13}+\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{51}{\sqrt{13}}$

- От (5) за $\Delta EBC \Rightarrow CH^2 = BH.EH \Rightarrow \left(\frac{18}{\sqrt{13}}\right)^2=\frac{51}{\sqrt{13}}EH \Rightarrow EH=\frac{108}{17\sqrt{13}}$
- $BE = BH + HE = \frac{51}{\sqrt{13}}+\frac{108}{17\sqrt{13}} \Rightarrow BE=\frac{975}{17\sqrt{13}}$ cm.

Зад. 5: ΔABC има страни AB = 5, BC = 4 и CA = 3.

а) Да се определи вида на триъгълника.

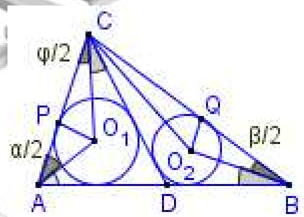
б) Точка D лежи на страната AB. Ако $\sphericalangle ACD = \varphi$, да се пресметнат радиусите r_A и r_B на окръжностите, които са вписани съответно в ΔADC и ΔBDC като функция на $\cot g\frac{\varphi}{2}$.

в) Намерете най-голямата стойност на произведението $r_A\, r_B$.

(УАСГ, 1997)

Решение: а) $5^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$, т.е. ΔABC е правоъгълен.

б) т. O_1 и т. O_2 са центровете на окръжностите вписани съответно в ΔADC и ΔBDC, тогава $O_1P=r_A$ и $O_2Q=r_B$.
Освен това $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$.



- AO_1, CO_1, CO_2, BO_2 – ъглополовящи $\Rightarrow$ $\sphericalangle O_1CA=\frac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle O_1AC=\frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle O_2BC=\frac{\beta}{2}$;
- намираме r_A:
  - ΔABC – правоъгълен ($\sphericalangle C = 90^0$) $\Rightarrow$ $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5};\ \sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$;
  - От Тр.Ф.(5.15) $\Rightarrow$ $\cot g\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=2$
  - От правоъгълният ΔO_1PC ($\sphericalangle P = 90^0$) $\Rightarrow$ $\cot g\frac{\varphi}{2}=\frac{CP}{PO_1}=\frac{CP}{r_A}\Rightarrow CP=r_A\cot g\frac{\varphi}{2}$;
  - От правоъгълният ΔO_1PA ($\sphericalangle P = 90^0$) $\Rightarrow$ $\cot g\frac{\alpha}{2}=\frac{AP}{PO_1}=\frac{AP}{r_A}\Rightarrow AP=r_A\cot g\frac{\alpha}{2}=2r_A$;
  - $AP + PC = AC \Rightarrow 2r_A + r_A\cot g\frac{\varphi}{2} = 3 \Rightarrow$ $r_A=\frac{3}{2+\cot g\frac{\varphi}{2}}$
- По подобен начин намираме r_B:
  - $\sphericalangle BCD = 90^0 - \sphericalangle DCA = 90^0 - \varphi$, но CO_2 – ъглополовяща $\Rightarrow$ $\sphericalangle BDO_2=\frac{1}{2}\sphericalangle BCD=\frac{90^0-\varphi}{2}$. От Тр.Ф.(4.6) $\Rightarrow$

$$\cot g\frac{90^0-\varphi}{2}=\cot g\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\cot g45^0\cot g\frac{\varphi}{2}+1}{\cot g\frac{\varphi}{2}-\cot g45^0}=\frac{\cot g\frac{\varphi}{2}+1}{\cot g\frac{\varphi}{2}-1};$$

  - ΔABC – правоъгълен ($\sphericalangle C = 90^0$) $\Rightarrow$ $\cos\beta=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5};\ \sin\beta=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$;
  - От Тр.Ф.(5.15) $\Rightarrow$ $\cot g\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=3$
  - От правоъгълният ΔO_2QC ($\sphericalangle Q = 90^0$) $\Rightarrow$

$$\cot g\frac{90^0-\varphi}{2}=\frac{CQ}{QO_2}=\frac{CQ}{r_B}\Rightarrow CQ=r_B\cot g\frac{90^0-\varphi}{2}=r_B\frac{\cot g\frac{\varphi}{2}+1}{\cot g\frac{\varphi}{2}-1};$$

  - От правоъгълният ΔO_2QB ($\sphericalangle Q = 90^0$) $\Rightarrow$ $\cot g\frac{\beta}{2}=\frac{BQ}{QO_2}=\frac{BQ}{r_B}\Rightarrow BQ=r_B\cot g\frac{\beta}{2}=3r_B$;
  - $BQ + QC = BC \Rightarrow$ $3r_B+r_B\,.\frac{\cot g\frac{\varphi}{2}+1}{\cot g\frac{\varphi}{2}-1}=4\Rightarrow r_B=2\frac{\cot g\frac{\varphi}{2}-1}{2\cot g\frac{\varphi}{2}-1}$

в) Полагаме $\cot g\frac{\varphi}{2} = x$. По условие $\varphi\in(0^0;90^0)$ затова $\frac{\varphi}{2}\in(0^0;45^0)$ и $ДМ_x$: $x\in(1;+\infty)$

- $$f(x)=r_A.r_B=\frac{3}{2+\cot g\frac{\varphi}{2}}.2\frac{\cot g\frac{\varphi}{2}-1}{2\cot g\frac{\varphi}{2}-1}=6\frac{x-1}{(2+x)(2x-1)}=6\frac{x-1}{2x^2+3x-2}$$

- Изследваме функцията f(x) за НГС (най-голяма стойност) при x ∈ (1; +∞):
  - $f' = 6\dfrac{-2x^2+4x+1}{(x-1)^2(2x-1)^2}$;
  - $f' \geq 0 \Rightarrow 6\dfrac{-2x^2+4x+1}{(x-1)^2(2x-1)^2} \geq 0 \Rightarrow -2x^2+4x+1 \geq 0 \mid .(-1) \Rightarrow 2x^2-4x-1 \geq 0$,

    $D = 6$, $\sqrt{D} = \sqrt{6}$, $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}; \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$;
  - ДМ$_x$ е x ∈ (1; +∞), но $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < 1$ и затова този корен отпада. Резултатите нанасяме в таблицата:

	1	$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	+∞
f′ (x)	+ + +	0	– – –
f (x)	↗		↘
		max	

  - От таблицата виждаме, че при $x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ имаме локален max. Разглежданият интервал x ∈ (1; +∞) е отворен от двете страни, т.е. f(x) има най-голяма стойност при $x = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ и тя е

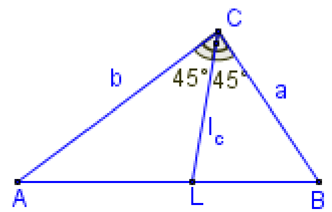
$$f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right) = 6\frac{\frac{2+\sqrt{6}}{2}-1}{2\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^2+3\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)-2} = \frac{6\sqrt{6}}{12+7\sqrt{6}} = \frac{6}{25}\left(7-2\sqrt{6}\right)$$

- Най-голямата стойност на произведението $r_A.r_B$ е $\dfrac{6}{25}\left(7-2\sqrt{6}\right)$.

Зад. 6: За произволен правоъгълен триъгълник, да се окаже, че:

а) S = r(r + 2R);

б) $l_c = \dfrac{\sqrt{2}\,ab}{a+b}$ (l_c е ъглополовяща на правия ъгъл)



Решение: а) ΔABC е описан правоъгълен триъгълник и от (8) ⇒ r = p – c ⇒ p = r + c, но (7) ⇒ c = 2R, тогава p = r + 2R.

- От (ГФ. 28) ⇒ S = pr = r(r + 2R).

б) Нека CL – ъглополовяща на ∢ACB ⇒

∢ACL = ∢BCL = 45^0.

$$\left.\begin{aligned} &S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \\ &S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ALC} + S_{\Delta BLC} = \frac{1}{2}bl_c\sin 45^0 + \frac{1}{2}al_c\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}bl_c + \frac{\sqrt{2}}{4}al_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{2}}{4}bl_c + \frac{\sqrt{2}}{4}al_c \Rightarrow l_c = \sqrt{2}\frac{ab}{a+b}$$

III. Задачи за упражнение:

Тестови задачи:

1. (ТУ, 2010): В ΔABC симетралата на страната AC пресича AB в т. N. Ако т. M е средата на AC и CN = a, то радиусът на описаната около ΔANM окръжност е равен на:

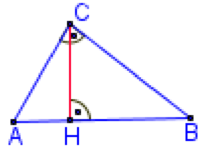
   А) a; Б) $\frac{a}{2}$; В) $\frac{a}{4}$; Г) 2a; Д) $\frac{a}{3}$.
2. (ТУ, 2011): В правоъгълен ΔABC точка M е среда на хипотенузата AB и ∢CMB = 42^0. Големината на ∢ABC е:

   А) 60^0; Б) 69^0; В) 30^0; Г) 45^0; Д) 48^0.
3. (ТУ, 2011): Даден е правоъгълен триъгълник с хипотенуза 10 cm и лице 24 cm^2. Радиусът на вписаната в този триъгълник окръжност е:

   А) 1 cm; Б) $\sqrt{2}$ cm; В) $\sqrt{3}$ cm; Г) 2 cm; Д) 4 cm.
4. (ТУ, 2011): В правоъгълен триъгълник сумата от катетите е 14 cm, а хипотенузата е 10 cm. Лицето на триъгълника е:

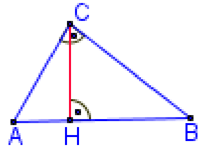
   А) 24 cm^2; Б) 48 cm^2; В) 12 cm^2; Г) 6 cm^2; Д) 36 cm^2.

5. (Матура, 2010): На чертежа CH е височината към хипотенузата AB на правоъгълен триъгълник ABC. Ако AH = 36 и HB = 64, дължината на катета AC е равна на:



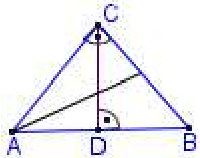
А) 80; Б) 60;
В) 48; Г) 30.

6. (Матура, 2010): На чертежа CH е височината към хипотенузата AB на правоъгълен триъгълник ABC. Ако AH = 1 cm и CH = 2 cm, лицето на ΔABC е:



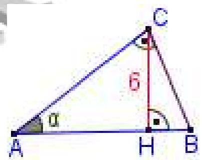
А) 12 cm^2; Б) 10 cm^2;
В) 6 cm^2; Г) 5 cm^2.

7. (Матура, 2010): Триъгълникът ABC на чертежа е равнобедрен и правоъгълен. Дължината на медианата към катета е $\sqrt{10}$. Дължината на височината CD към хипотенузата е:



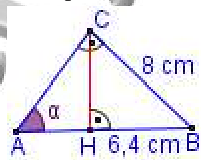
А) $\sqrt{2}$; Б) 2;
В) $2\sqrt{2}$; Г) 4.

8. (Матура, 2011): На чертежа CH е височина в правоъгълния ΔABC (∢ACB = 90^0). Ако CH = 6 и cos α = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, то BC е равна на:



А) 30; Б) $3\sqrt{5}$;
В) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$; Г) $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

9. (Матура, 2011): На чертежа CH е височина към хипотенузата AB в правоъгълния ΔABC. Ако BC = 8 cm и BH = 6, 4 cm, то tg α е равен на:



А) $\frac{4}{3}$; Б) $\frac{4}{5}$;
В) $\frac{3}{4}$; Г) $\frac{3}{5}$.

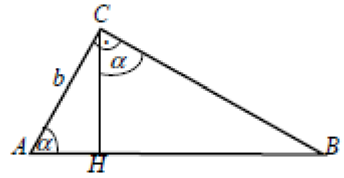
10. (ТУ, 2012): Даден е правоъгълен ΔABC с катети AC = 8 cm и BC = 6 cm. Ъглополовящата на правия ъгъл пресича хипотенузата AB в точка L. Отсечката CL има дължина:

А) $\frac{7}{12}\sqrt{2}$; Б) $\frac{24}{7}$; В) $\frac{24\sqrt{2}}{7}$; Г) $\frac{7}{24}$; Д) $4\sqrt{2}$.

11. (ТУ, 2012): В правоъгълния ΔABC отсечката CD е височина към хипотенузата AB. Ако AD = 4 cm и DB = 5 cm, то дължината на катета AC в cm е:

А) 9; Б) 36; В) 5; Г) 6; Д) 20.

12. (Матура, 2012): Върху хипотенузата AB на правоъгълния ΔABC е взета точка H, така че ∢HCB = ∢CAB = α. Ако AC = b, то диаметърът на описаната окръжност около ΔHCB е равен на:



А) b sin α; Б) b cos α;
В) b tg α; Г) $\frac{1}{2}$ b tg α.

13. (Матура, 2012): Катетите на правоъгълен триъгълник са с дължини 6 cm и 10 cm. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е:

А) 4 cm; Б) 5 cm; В) $\frac{\sqrt{126}}{2}$ cm; Г) $\sqrt{34}$ cm.

Задачи за подробно решаване:

Следват 35 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидат-студенти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидат-студентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".