адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

===

Намиране на елементи на триъгълник

Бележка:

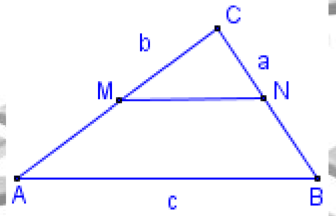
Навсякъде в долните формули се използват следните означения: AB=c, AC=b, BC=a, ∢A=α, ∢B=β, ∢C=γ, m_a, m_b, m_c – медиани към съответните страни; l_a, l_b, l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a, h_b, h_c – височини към съответните страни; r - радиуса на вписаната окръжност; R – радиус на описаната окръжност; P – периметър, S – лице.

I. Средна отсечка в триъгълник

- Определение – Отсечка, която съединява средите на две от страните на триъгълник (Фиг. 1).
- Теореми:
  - Права, минаваща през средата на една от страните на триъгълник и е успоредна на втора страна, то тя минава през средата на третата страна (Фиг. 1), т.е.

    (1): т. M – среда на AC и MN || AB следва, че т. N е среда на BC.
  - Всяка средна отсечка в триъгълник е успоредна на една от страните му и е равна на половината от нея (Фиг. 1), т.е.

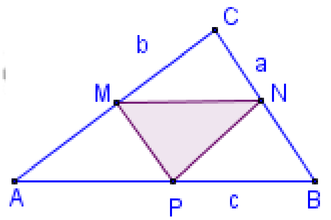
    (2): MN – средна отсечка ⇔ $MN = \frac{1}{2}AB$



Фиг.1

Основна задача:

Зад. 1: На чертежа е даден ΔABC със страни BC = a, AC = b и AB = c. Да се намери периметъра на триъгълник с върхове средите на тези страни.



Решение:

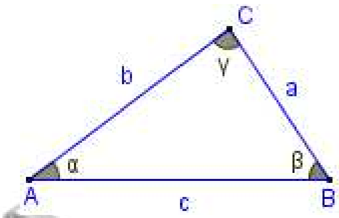
- Точките M, N и P са среди съответно на страните AC, BC и AB, т.е. MN, MP и NP са средни отсечки в ΔABC.
- Тогава от (2) ⇒ MN = $\frac{1}{2}$AB; MP = $\frac{1}{2}$BC; NP = $\frac{1}{2}$AC.
- $P_{\Delta MNP} = MN + MP + NP = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$

II. Връзка между страни и ъгли в триъгълник

- Косинусова теорема (Фиг. 2):

  (3): $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\alpha$;
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\beta$;
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma$.
- Синусова теорема (Фиг. 2):

  (4): $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

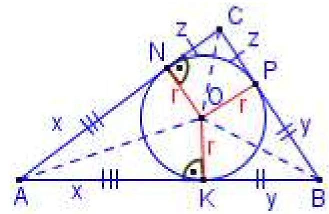


Фиг.2

III. Триъгълник вписан в окръжност или описан около окръжност

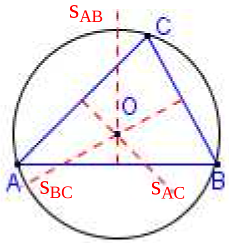
- Окръжност вписана в триъгълник:
  - Ъглополовящите на вътрешните ъгли в триъгълник се пресичат в една точка – центъра O на вписаната в триъгълника окръжност (Фиг. 3).
  - Нека произволен ΔABC има стани AB=c, BC=a и AC=b, и вписаната в него окръжност допира тези страни съответно в точките K, P, N (Фиг. 3). Ако означим: AK = AN = x, BK=BP=y, CP = CN = z и p – полупериметъра на ΔABC, то

    (5): x = p – a, y = p – b, z = p – c.

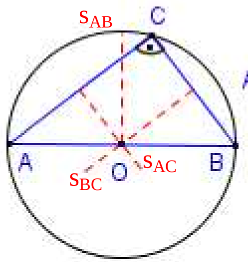


Фиг.3

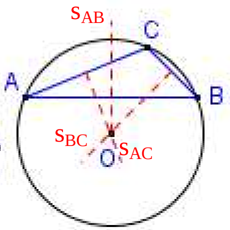
- Окръжност описана около триъгълник – Симетралите на трите страни на триъгълник се пресичат в една точка (точка O) – центъра на описаната около триъгълника окръжност.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

В зависимост от вида на триъгълника центърът O на описаната около триъгълника окръжност е на различно място:

- Ако ΔABC е остроъгълен, т. O е вътрешна за триъгълника (Фиг. 4).
- Ако ΔABC е правоъгълен, т. O е среда на хипотенузата AB (Фиг. 5).
- Ако ΔABC е тъпоъгълен, т. O е външна за триъгълника (Фиг. 6).

♦ Права на Ойлер – За всеки произволен триъгълник, ортоцентърът H, медицентърът M и центърът O на описаната окръжност (пресечната точка на симетралите на страните) лежат на една права, като HM = 2MO.

♦ Формула на Ойлер (за намиране на разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник): Ако с d отбележим разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник, с R – радиуса на описаната окръжност, а с r – радиуса на вписаната окръжност, то

(4): $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} \ge 0$,

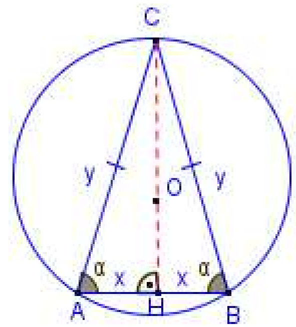
като равенството се получава при равностранен триъгълник (защото тогава центровете на описаната и вписаната окръжност съвпадат).

IV. Основни типове задачи:

Зад. 2: В окръжност с радиус 12, 5 cm е вписан равнобедрен триъгълник с височина към основата 16 cm. Намерете страните, косинусите на ъглите на триъгълника и определете видът на ΔABC според ъглите.

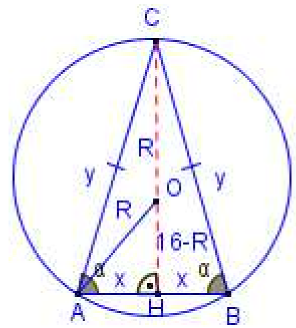
Решение: ΔABC – равнобедрен и CH – височина $\Rightarrow$ CH – медиана, т.е. AC = BC = y, AH = BH = x

I Начин:



- ΔABC – описан около окръжност с радиус R и от Синусова теорема $\Rightarrow$
  $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{y}{\sin\alpha} = 2.12,5 \Rightarrow$
  $(A): \sin\alpha = \frac{y}{25}$;
- От тригонометрична функция за правоъгълния $\Delta AHC \Rightarrow (B): \sin\alpha = \frac{CH}{AC} = \frac{16}{y}$;
- От (A) и (B) $\Rightarrow \frac{y}{25} = \frac{16}{y} \Rightarrow y = 20$;
- AC = BC = y = 20 cm,;
- От Питагорова теорема за $\Delta AHC \Rightarrow$
  $AH^2+CH^2=AC^2 \Rightarrow x^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow AB = 2x = 2.12 = 24$ cm;
- От Косинусова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha \Rightarrow$
  $\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - AC^2}{2AB.AC} = \frac{24^2}{2.24.20} = \frac{3}{5}$;
- Намираме косинуса на ∢C:
  - От Теорема за сбор на ъгли в $\Delta ABC \Rightarrow \gamma = 180^0 - 2\alpha$);
  - $\cos\gamma = \cos(180^0 - 2\alpha) = -\cos 2\alpha \overset{(Тр.Ф.5.2)}{=} -\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = -\left(\frac{2.3}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5}$;
- От $\cos\gamma = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow \gamma \in (90^0; 180^0)$, т.е. ΔABC – тъпоъгълен (с тъп ъгъл при върха C).

II Начин:



- ΔABC – равнобедрен и CH – височина $\Rightarrow$
  т.O∈CH, т.е. AO = CO = R, OH = CH – CO =
  16 – R = 16 – 12,5 $\Rightarrow$ OH = 3,5;
- От Питагорова теорема за $\Delta AOH \Rightarrow$
  $AO^2=AH^2+OH^2 \Rightarrow 12.5^2 = x^2 + 3,5^2 \Rightarrow x = 12$;
- AB = 2x = 2.12 = 24 cm;
- От Питагорова теорема за $\Delta AHC \Rightarrow$
  $AC^2=AH^2+CH^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow AC = 20$ cm;
- Намирането на косинусите на ъглите на триъгълника и определете видът на ΔABC според ъглите

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

продължава по същият начин, както и в I начин.

Зад. 3: Нека A_1, B_1, C_1 са петите на височините, спуснати от върховете A, B, C на остроъгълния ΔABC и $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Да се докаже, че:

а) радиусът на описаната около ΔABC окръжност е равен на диаметъра на описаната около $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност;

б) радиусите OA, OB, OC на описаната около ΔABC окръжност са перпендикулярни съответно на страните B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 на $\Delta A_1B_1C_1$;

в) $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \cot g\beta \cot g\gamma$; $\dfrac{HB_1}{BB_1} = \cot g\gamma \cot g\alpha$ $\dfrac{HC_1}{CC_1} = \cot g\alpha \cot g\beta$;

г) $\dfrac{HC_1}{CH} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}$; $\dfrac{HA_1}{AH} = \dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$; $\dfrac{HB_1}{BH} = \dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta}$.

Решение:

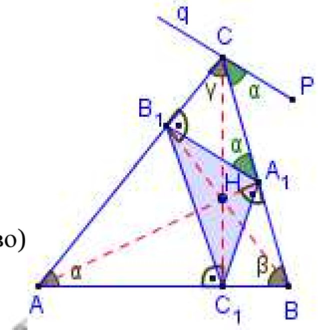
а) Нека R и R_1 са радиуси на описаните около ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ окръжности.

- Намираме B_1C_1 по един начин:
  - $$\left.\begin{aligned} &от\ \Delta AA_1C \Rightarrow \frac{CA_1}{AC} = \cos\gamma \\ &от\ \Delta BCB_1 \Rightarrow \frac{CB_1}{BC} = \cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A): \frac{CA_1}{AC} = \frac{CB_1}{BC} = \cos\gamma$$
  - $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ (по II признак, защото (A) е изпълнено и γ – общ ъгъл) $\Rightarrow$ $\sphericalangle B_1A_1C = \sphericalangle BAC = \alpha$.
  - По подобен начин се доказва, че $\Delta A_1C_1A \sim \Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle BAC = \alpha$.
  - От $\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^0 - (\sphericalangle B_1A_1C + \sphericalangle BA_1C_1) = 180^0 - 2\alpha$.
  - От Синусова теорема за $\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{\sin(180^0 - 2\alpha)} = 2R_1$, т.е.

    (B): $B_1C_1 = 2R_1 \sin 2\alpha$.
- Намираме B_1C_1 по друг начин:
  - От Синусова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow BC = 2R.\sin\alpha$.
  - По горе доказахме, че $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ с коефициент на подобие $\cos\gamma$. По подобен начин се доказва, че $\Delta B_1C_1A \sim \Delta ABC$ с коефициент на подобие $\cos\alpha$, т.е. $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \cos\alpha \Rightarrow B_1C_1 = BC\cos\alpha = 2R\sin\alpha\cos\alpha$ и от (ТрФ. 5.1) $\Rightarrow$

    (C): $B_1C_1 = R\sin 2\alpha$.
  - Заместваме (C) в (B) $\Rightarrow R\sin 2\alpha = 2R_1 \sin 2\alpha \Rightarrow R = 2R_1 = 2d_1$.

б) На чертежа т. O – център на описаната около ΔABC окръжност k. През т. C построяваме права q допирателна до $k \Rightarrow OC \perp q$.



- Доказваме, че $A_1B_1 \parallel q$:
  - $\sphericalangle BAC$ – вписан $\Rightarrow$

    $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$
  - $\sphericalangle BCP$ – периферен $\Rightarrow$

    $\sphericalangle BCP = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \sphericalangle BCP = \alpha$, но $\sphericalangle B_1A_1C = \alpha$ (по д-во)

    $\Rightarrow \sphericalangle B_1A_1C = \sphericalangle BCP = \alpha$, т.е. $A_1B_1 \parallel q$
- Но по построение $OC \perp q \Rightarrow A_1B_1 \perp OC$.
- По подобен начин доказваме, че $A_1C_1 \perp OB$ и $B_1C_1 \perp OA$.

в) Нека AB = c.

- Намираме HA_1:
  - От Тригонометрична функция за $\Delta ABA_1 \Rightarrow \dfrac{BA_1}{AB} = \cos\beta \Rightarrow BA_1 = c\cos\beta$.
  - От $\Delta BCB_1 \Rightarrow \sphericalangle B_1BC = 90^0 - \gamma$.
  - От $\Delta HBA_1 \Rightarrow \sphericalangle BHA_1 = 90^0 - (90^0 - \gamma) = \gamma$.
  - От Тригонометрична функция за $\Delta HBA_1 \Rightarrow \dfrac{HA_1}{BA_1} = \cot g\,\gamma \Rightarrow$

    $HA_1 = c\cos\beta\cot g\,\gamma$.
- Намираме AA_1: От Тригонометрична функция за $\Delta ABA_1 \Rightarrow \dfrac{AA_1}{AB} = \sin\beta \Rightarrow$

  $AA_1 = c\sin\beta$.
- $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{c\cos\beta\cot g\gamma}{c\sin\beta} \Rightarrow \dfrac{HA_1}{AA_1} = \cot g\beta\cot g\gamma$.
- По подобен начин доказваме и другите две равенства.

г) Ще докажем равенството $\frac{HA_1}{AH} = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$. Другите равенства се доказват по подобен начин.

- Намираме BH по един начин:
  - Във в) доказахме, че $\sphericalangle BHA_1 = \gamma$.
  - От Тригонометрична функция за $\Delta HBA_1 \Rightarrow \frac{HA_1}{BH} = \cos\gamma \Rightarrow$

  $(D): BH = \frac{HA_1}{\cos\gamma}$.
- Намираме BH по други начин:
  - От $\Delta ABA_1 \Rightarrow \sphericalangle BAA_1 = 90^0 - \beta$.
  - От $\Delta ABB_1 \Rightarrow \sphericalangle ABB_1 = 90^0 - \alpha$.
  - От Синусова теорема за $\Delta ABH \Rightarrow \frac{BH}{\sin(90^0 - \beta)} = \frac{AH}{\sin(90^0 - \alpha)}$, но

  $\sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$ и $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \Rightarrow \frac{BH}{\cos\beta} = \frac{AH}{\cos\alpha} \Rightarrow$

  $(E): BH = \frac{AH\cos\beta}{\cos\alpha}$
- От (D) и (E) $\Rightarrow \frac{HA_1}{\cos\gamma} = \frac{AH\cos\beta}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{HA_1}{AH} = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

Зад. 4: (УАСГ, 2009) Ъглите при върховете A, B и C на остроъгълен ΔABC са съответно α, β и γ. Окръжност с диаметър AB пресича страните BC и AC съответно в точките A_1, и B_1 Докажете, че:

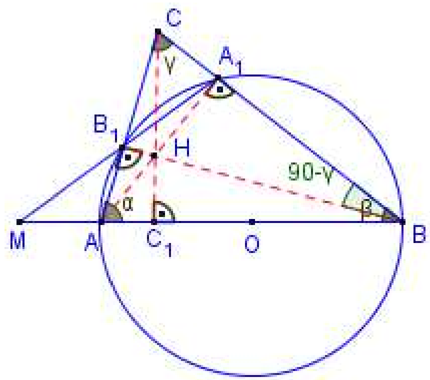
а) Триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са подобни, и $A_1B_1 = AB\cos\gamma$;

б) $\frac{MA}{MB} = \frac{\cot g\alpha}{\cot g\beta}$, където M е пресечната точка на правите AB и A_1B_1;

в) $\frac{HC_1}{CH} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}$, ако CC_1 ($C_1 \in AB$) е височина в ΔABC, а H е неговият ортоцентър.

Решение:

а)



- Четириъгълник ABA_1B_1 – вписан в окръжност $\Rightarrow \sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle BA_1B_1 = 180^0 \Rightarrow \sphericalangle BA_1B_1 = 180^0 - \alpha$;
- $\sphericalangle CA_1B_1 + \sphericalangle BA_1B_1 = 180^0 \Rightarrow \sphericalangle CA_1B_1 = 180^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha$;
- $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ (по I признак, защото $\sphericalangle C$ – общ, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CA_1B_1 = \alpha$ – по доказателство) $\Rightarrow$

  $(A): \frac{CA_1}{CA} = \frac{A_1B_1}{AB}$;
- От правоъгълният $\Delta AA_1C \Rightarrow$

  $(B): \cos\gamma = \frac{CA_1}{AC}$;
- От (A) и (B) $\Rightarrow \cos\gamma = \frac{A_1B_1}{AB} \Rightarrow A_1B_1 = AB\cos\gamma$.

б) $\sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle MB_1A = \beta$ – като връхни ъгли и $\sphericalangle MAB_1 = 180^0 - \sphericalangle BAB_1 = 180^0 - \alpha$;

- От $\Delta MAB_1 \Rightarrow \sphericalangle AMB_1 = 180^0 - (\sphericalangle MB_1A + \sphericalangle MAB_1) = 180^0 - (180^0 - \alpha + \beta) \Rightarrow \sphericalangle AMB_1 = \alpha - \beta$;
- От Синусова теорема за $\Delta MAB_1 \Rightarrow \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{AB_1}{\sin(\alpha-\beta)} \Rightarrow (C): MA = \frac{AB_1\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$;
- Изразяваме AB_1 чрез MB:
  - От Синусова теорема за $\Delta MB_1B \Rightarrow$

  $\frac{MB}{\sin(90^0+\beta)} = \frac{BB_1}{\sin(\alpha-\beta)} \Rightarrow (D): \frac{MB}{\cos\beta} = \frac{BB_1}{\sin(\alpha-\beta)}$;
  - От правоъгълния $\Delta ABB_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB_1} = tg\alpha \Rightarrow BB_1 = AB_1\, tg\,\alpha$;
  - Заместваме в (D) $\Rightarrow \frac{MB}{\cos\beta} = \frac{AB_1 tg\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \Rightarrow AB_1 = \frac{MB\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta\, tg\,\alpha}$;

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

- Заместваме в (C) $\Rightarrow$
$MA=\dfrac{MB\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos\beta\, tg\alpha\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{MB\sin\beta}{\cos\beta\, tg\alpha}\Rightarrow\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\dfrac{1}{\cot g\alpha}}\Rightarrow\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\cot g\alpha}{\cot g\beta}$;

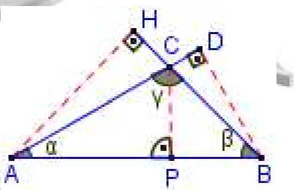
в) От правоъгълния $\Delta C_1BC \Rightarrow \measuredangle C_1CB = 90^0-\beta$;

- От правоъгълния $\Delta B_1BC \Rightarrow \measuredangle B_1BC = 90^0-\gamma$;
- От $\Delta ABB_1 \Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 90^0-\alpha$. Тогава от $\Delta BHC_1 \Rightarrow \measuredangle C_1HB = 90^0-\measuredangle C_1BH = 90^0-(90^0-\alpha) \Rightarrow \measuredangle C_1HB = \alpha$;
- От Синусова теорема за $\Delta BHC \Rightarrow$
$\dfrac{BH}{\sin(90^0-\beta)}=\dfrac{CH}{\sin(90^0-\gamma)}\Rightarrow(E)\text{: } BH=\dfrac{CH\cos\beta}{\cos\gamma}$;
- От правоъгълния $\Delta C_1HB \Rightarrow \dfrac{C_1H}{BH}=\cos\alpha\Rightarrow BH=\dfrac{C_1H}{\cos\alpha}$;
- Заместваме в (E) $\Rightarrow \dfrac{C_1H}{\cos\alpha}=\dfrac{CH\cos\beta}{\cos\gamma}\Rightarrow\dfrac{C_1H}{CH}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}$.

Зад. 5: Страните на триъгълник са a = 4 cm, b = 13 cm, c = 15 cm. Намерете:

а) косинусите на ъглите в триъгълника;
б) височините в триъгълника;
в) радиуса на описаната около триъгълника окръжност;
г) радиусът на описаната около триъгълник ABL окръжност, където т. L е център на вписаната в ΔABC окръжност.

Решение: а) От Косинусова теорема за ΔABC и от (1) $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\alpha$
$\Rightarrow 4^2 = 13^2 + 15^2 - 2.13.15.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{63}{65}$



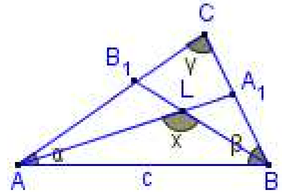
- $\cos\beta=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{15^2+4^2-13^2}{2.4.15}=\dfrac{3}{5}$
- $\cos\gamma=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{13^2+4^2-15^2}{2.4.13}=-\dfrac{5}{13}$;

б) $15^2 > 13^2 + 4^2 \Rightarrow \gamma > 90^0$, т.е. височините AH и BD са извън триъгълника.

- Намираме височината AH:
  - От Основното тригонометрично равенство следва, че $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\dfrac{9}{25}$
  $\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{4}{5}$;
  - От ΔABH ($\measuredangle H = 90^0$) $\Rightarrow \sin\beta=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow\dfrac{4}{5}=\dfrac{AH}{15}\Rightarrow AH=12\ cm$.
- По подобен начин намираме височините BD и CP:
  - $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\dfrac{63}{65}\right)^2\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{16}{65}$;
  - От ΔABD ($\measuredangle D = 90^0$) $\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{BD}{AB}\Rightarrow\dfrac{16}{65}=\dfrac{BD}{15}\Rightarrow BD=\dfrac{48}{13}\ cm$;
  - От ΔAPC ($\measuredangle P = 90^0$) $\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{CP}{AC}\Rightarrow\dfrac{16}{65}=\dfrac{CP}{13}\Rightarrow CP=\dfrac{16}{5}\ cm$

в) От Синусова теорема за ΔABC $\Rightarrow \dfrac{AC}{\sin\beta}=2R\Rightarrow\dfrac{13}{\frac{4}{5}}=2R\Rightarrow R=\dfrac{65}{8}\ cm$.

г) Нека AA_1 и BB_1 са ъглополовящи тогава т. L е център на вписаната в ΔABC окръжност.

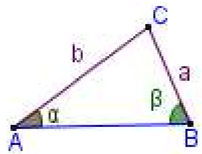


- От Основна задача следва, че щом AA_1 и BB_1 са ъглополовящи, то
$\measuredangle ALB = x = 90^0+\dfrac{\gamma}{2}$;
- $\sin x=\sin\left(90^0+\dfrac{\gamma}{2}\right)=\cos\dfrac{\gamma}{2}$;
- $\gamma\in(90^0; 180^0)\Rightarrow\dfrac{\gamma}{2}\in(45^0; 90^0)$ и от (Тр.Ф. 5.14) $\Rightarrow$
$\cos\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\gamma}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{5}{13}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4}{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$;
- От Синусова теорема за ΔABL $\Rightarrow \dfrac{AB}{\sin x}=2R_1\Rightarrow R_1=\dfrac{15}{2.\frac{2}{\sqrt{13}}}\Rightarrow R_1=\dfrac{15\sqrt{13}}{4}$.

V. Задачи за упражнение:

Тестови задачи:

1. (Матура, 2010): За триъгълника на чертежа е дадено, че $\sin\alpha : \sin\beta = \sqrt{2} : 2$. За дължините на страните a и b е изпълнено:



А) a = 2b; Б) $a = \sqrt{2}\,b$;
В) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$; Г) $a = \frac{1}{2}b$.

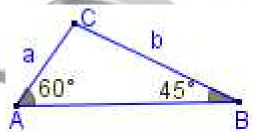
2. (Матура, 2010): Триъгълникът ABC е със страна BC = 6 и $\sphericalangle BAC = 150^0$. Дължината на окръжността, описана около триъгълника е:

А) 6π; Б) 12π; В) $\frac{6\sqrt{3}}{3}\pi$; Г) $6\sqrt{3}\pi$.

3. (Матура, 2010): Радиусът на описаната около ΔABC окръжност е $17\sqrt{2}$ и $\cos\sphericalangle BAC = -\frac{4}{\sqrt{17}}$. Дължината на страната BC е равна на:

А) $8\sqrt{34}$; Б) $4\sqrt{34}$; В) $2\sqrt{34}$; Г) $\sqrt{34}$.

4. (Матура, 2011): За триъгълника на чертежа отношението $a^2 : b^2$ е равно на:



А) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; Б) 2 : 3;
В) $\sqrt{2} : 3$; Г) $2 : \sqrt{3}$.

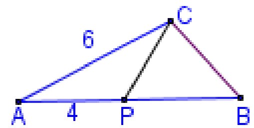
5. (ТУ, 2011): Ако страните на триъгълник са 12 cm, 15 cm и 18 cm, то косинусът на ъгъла срещу най-голямата страна е:

А) $-\frac{1}{8}$; Б) $\frac{1}{8}$; В) $\frac{1}{4}$; Б) $-\frac{1}{4}$; Д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. (Матура, 2010): Триъгълник ABC има страни AB = 7, BC = 3 и $\sphericalangle ACB = 60^0$. Видът на ΔABC е:

А) остроъгълен; Б) правоъгълен; В) тъпоъгълен; Г)неопределен.

7. (Матура, 2010): В ΔABC AC = 6 cm и AB = 9 cm. Ако точка $P \in AB$ е такава, че AP = 4 cm и CP = $\frac{8}{3}$ cm, то дължината на страната BC е равна на:



А) 4 cm; Б) 5 cm;
В) 6 cm; Г) 8 cm.

8. (Матура, 2011): Триъгълникът ΔABC има страни AB = 7 cm, BC = 3 cm и AC = 5 cm. Мярката на $\sphericalangle ACB$ е:

А) 45^0; Б) 60^0; В) 120^0; Г) 135^0.

9. (ТУ, 2012): Даден е триъгълник със страни 11 cm, 24 cm и 31 cm. Най-големият ъгъл в този триъгълник има големина:

А) 45^0; Б) 60^0; В) 90^0; Г) 120^0; Д) 135^0.

10. (Матура, 2010): В ΔABC $\sphericalangle BAC = 60^0$, а AB = 3 cm. Ако радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm, дължината на страната AC е равна на:

А) 5 cm; Б) 7 cm; В) 8 cm; Г) $\sqrt{79}$ cm.

11. (ТУ, 2010): Ако за ъглите α и β на триъгълник е изпълнено равенството sin α + sin β = cos α + sin β, то третият ъгъл γ на триъгълника е равен на:

А) 60^0; Б) 90^0; В) 30^0; Г) 120^0; Д) 135^0.

12. (ТУ, 2010): В равнобедрен ΔABC (AC = BC) ъгълът при основата е α. Ако височината към основата е с 5 cm по-голяма от радиуса на вписаната в ΔABC окръжност, то дължината на този радиус в cm е:

А) 5cos α; Б) 5sin α; В) $\frac{5}{2}$; Г) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; Д) 5tg α.

13. (Матура, 2011): Даден е ΔABC, за който AB = $10\sqrt{2}$ и $\sphericalangle ACB = 135^0$. Разстоянието от центъра на описаната около триъгълника окръжност до страната AB е равно на:

А) $2\sqrt{2}$; Б) $3\sqrt{2}$; В) $4\sqrt{2}$; Г) $5\sqrt{2}$.

14. (Матура, 2011): Триъгълникът ABC е равнобедрен. Ако са дадени AC = BC = b и $\sphericalangle ACB = \gamma$, то радиусът на описаната около триъгълника окръжност е:

А) $\dfrac{b}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$; Б) b.cos $\dfrac{\gamma}{2}$; В) b.cos γ; Г) $\dfrac{b}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$.

15. (ТУ, 2012): Ако радиусът на вписаната в равностранния ΔАВС окръжност е $3\sqrt{3}$ cm, то страната на триъгълника има дължина:

А) 12 cm; Б) 18 cm; В) 30 cm; Г) 36 cm; Д) 40 cm.

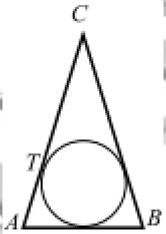
16. (Матура, 2012) Даден е ΔАВС, за който АС = 3cm, ВС = 6cm и ∢АСВ=120^0. Дължината на ъглополовящата CL (L ∈ АВ) е:

А) 2 cm; Б) 3 cm; В) $2\sqrt{3}$ cm; Г) $2\sqrt{7}$ cm.

17. (Матура, 2012) В ΔАВС ∢А = 50^0, а tg∢В = $\sqrt{3}$. Мярката на ∢С е равна на:

А) 10^0; Б) 60^0; В) 70^0; Г) 110^0.

18. (Матура, 2012): За начертания равнобедрен ΔАВС АС = ВС = b, а ∢ВАС = 2α. Вписаната в ΔАВС окръжност се допира до АС в точка Т. Отсечката СТ е равна на:

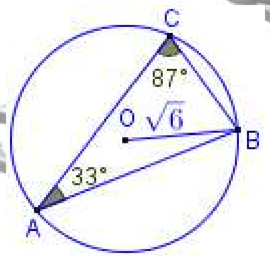


А) b sin 2 α; Б) 2b $\sin^2$ α;
В) 2b $\cos^2$ α; Г) b cos α.

19. (Матура, 2012) Даден е ΔАВС със страни АВ = 4 cm, ВС = $2\sqrt{3}$ и АС = $2\sqrt{13}$ cm. Мярката на ∢АВС е равна на:

А) 150^0; Б) 120^0; В) 60^0; Г) 30^0.

20. (Матура, 2012): За ΔАВС на чертежа ∢ВАС = 33^0, ∢АСВ = 87^0 и радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $\sqrt{6}$. Страната АС е равна на:



А) $\sqrt{6}$; Б) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;
В) $2\sqrt{3}$; Г) $3\sqrt{2}$.

21. (ТУ, 2010): Ако две от страните на триъгълник са с дължини 2 cm и 4 cm, а ъгълът между тях е 60^0, то триъгълникът е:

А) остроъгълен; Б) правоъгълен; В) тъпоъгълен;
Г) равнобедрен; Д) равностранен.

Задачи за подробно решаване:

Синусова теорема. Косинусова теорема

Следват 40 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидат-студенти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидат-студентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.