Лице на триъгълник

Бележка:

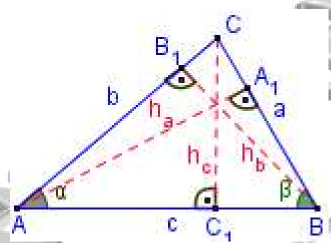
Навсякъде в долните формули се използват следните означения: AB=c, AC=b, BC=a, ∢A=α, ∢B=β, ∢C=γ, m_a, m_b, m_c – медиани към съответните страни; l_a, l_b, l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a, h_b, h_c – височини към съответните страни; r - радиуса на вписаната окръжност; R – радиус на описаната окръжност; P – периметър, S – лице.

I. Лице на произволен триъгълник – Фиг. 1

(1): $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

(2): $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta$;

(3): $S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$;



Фиг.1

(4): $S = pr = \frac{abc}{4R}$, където $p = \frac{a+b+c}{2}$ е полупериметъра, r – радиус на вписаната окръжност, R – радиус на описаната окръжност;

(5): Херонова формула: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където p е полупериметър.

II. Лице на равностранен триъгълник със страна a

♦ Височина в равностранен триъгълник:

(6): $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;

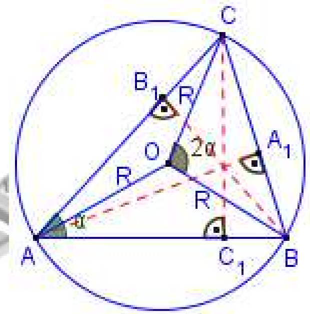
♦ Лице:

(7): $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$;

III. Основни типове задачи:

Зад. 1: Нека A_1, B_1, C_1 са петите на височините, спуснати от върховете A, B, C на остроъгълния ΔABC и ∢ABC = β, ∢BAC = α, ∢ACB = γ. Да се докаже, че лицето на ΔABC е S = R.p_1, където R е радиуса на описаната около ΔABC окръжност, а p_1 е полупериметъра на $\Delta A_1B_1C_1$.

Решение: Нека т. O е център на описаната около ΔABC окръжност, тогава AO = BO = CO = R – радиус на описаната около ΔABC окръжност.



- ∢BOC – централен и ∢BAC – вписан ⇒ ∢BOC= $\overset{\frown}{BC}$ = 2∢BAC = 2α.
- по подобен начин се доказва, че ∢AOC = 2 β, ∢AOB = 2 γ.
- От Синусова теорема за ΔABC ⇒ $\sin\alpha = \frac{BC}{2R}$; $\sin\beta = \frac{AC}{2R}$; $\sin\gamma = \frac{AB}{2R}$;
- $S = S_{\Delta BCO} + S_{\Delta ABO} + S_{\Delta ACO}$.
- От (2) ⇒ $S = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2\sin 2\beta + \frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma$.
- От (ТрФ. 5.1) ⇒ $S = R^2(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) = R^2\left(\frac{BC}{2R}\cos\alpha + \frac{AC}{2R}\cos\beta + \frac{AB}{2R}\cos\gamma\right) = \frac{R}{2}(BC\cos\alpha + AC\cos\beta + AB\cos\gamma)$
- От Зад № 6 в тема „Триъгълник – Теорема на Талес. Подобни триъгълници” доказахме, че B_1C_1 = BC cos α; C_1A_1 = AC cos β; A_1B_1 = AB cos γ, тогава горното равенство е $S = \frac{R}{2}(B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1) = \frac{R}{2}.P_1 = R.p_1$, където P_1 е периметъра на $\Delta A_1B_1C_1$, а $p_1 = \frac{P_1}{2}$ е полупериметъра.

Зад. 2: Страните на триъгълник са a = 4 cm, b = 13 cm, c = 15 cm. Намерете:

а) радиуса на вписаната в триъгълника окръжност;

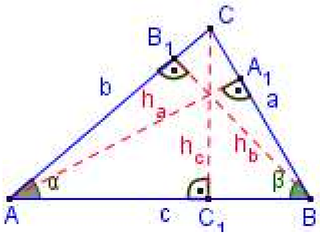
б) радиуса на описаната около триъгълника окръжност;

в) височините в триъгълника;

Решение:

а) Използваме формула (4):

- $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4+13+15}{2}=16$
- От (5) $\Rightarrow$ $S=\sqrt{16.12.3.1}=24$;
- От (4) $\Rightarrow S = p.r \Rightarrow 24 = 16.r \Rightarrow r = 1,5$ cm;



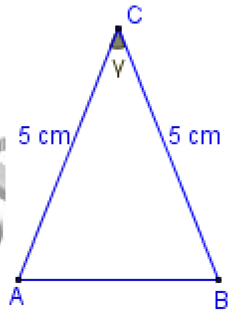
б) Използваме формула (4) $\Rightarrow$

$S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow 24=\frac{4.13.15}{4R}\Rightarrow R=\frac{65}{8}$ cm.

в)

- $S_{\Delta ABC}=\frac{AB.h_c}{2}\Rightarrow 24=\frac{15h_c}{2}\Rightarrow h_c = 3,2$ cm;
- $S_{\Delta ABC}=\frac{BC.h_a}{2}\Rightarrow 24=\frac{4h_a}{2}\Rightarrow h_a = 12$ cm;
- $S_{\Delta ABC}=\frac{AC.h_b}{2}\Rightarrow 24=\frac{13h_b}{2}\Rightarrow h_b=\frac{48}{13}\,cm$.

Зад. 3: В равнобедрен триъгълник бедрото е 5 cm, а котангенсът на ъгълът между бедрата е 2. Намерете лицето на триъгълника.



Решение:

- $\cot g\gamma=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\Rightarrow 2=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$, т.е. $\cos\gamma = 2x$, $\sin\gamma = x$;
- От Основното тригонометрично равенство $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow$ $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$;
- $\sin\gamma = x = \frac{\sqrt{5}}{5}$;
- От (2) $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC^2\sin\gamma=\frac{1}{2}5^2\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$;

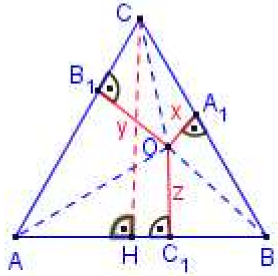
Зад. 4: От вътрешна точка M на равностранен ΔABC са спуснати перпендикулярите $MN = 5$ cm ($N \in BC$), $MP = 14$ cm ($P \in AB$), $MQ = 16$ cm ($Q \in AC$) към страните на триъгълника. Намерете:

а) височината в ΔABC;

б) страната на ΔABC;

в) страните на ΔNPQ.

Решение: Ще решим по-обща задача. Нека т. O е вътрешна за равностранния ΔABC и A_1, B_1, C_1 са проекциите ѝ върху страните BC, AC, AB (Фиг. 1). Означаваме $OA_1 = x$, $OB_1 = y$, $OC_1 = z$, $CH = h$.



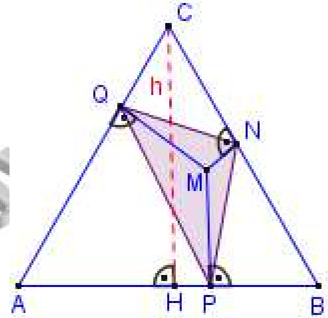
Фиг.1

- От $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} \Rightarrow$
  $\frac{1}{2}a.h=\frac{1}{2}a.x+\frac{1}{2}a.y+\frac{1}{2}a.z=\frac{1}{2}a(x+y+z)\Rightarrow$
  $(A): h = x + y + z$

а) От Фиг. 2 и (A) $\Rightarrow CH = MN + MQ + MP = 5+14+16$ $\Rightarrow CH = 35$ cm.

б) ΔABC – равностранен и от (6) $\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Rightarrow$

$35=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Rightarrow a=\frac{70\sqrt{3}}{3}\,cm$



Фиг.2

в)

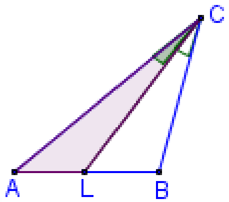
- Намираме страната NQ:
  - От QMNC – четириъгълник $\Rightarrow \sphericalangle QMN + \sphericalangle MNC + \sphericalangle NCQ + \sphericalangle CQM = 360^0 \Rightarrow \sphericalangle QMN + 90^0 + 60^0 + 90^0 = 360^0 \Rightarrow \sphericalangle QMN = 120^0$;
  - От Косинусова теорема за $\Delta QMN \Rightarrow$ $QN^2=QM^2 + MN^2 - 2QM.MN.\cos\sphericalangle QMN = 16^2 + 5^2 - 2.16.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 361 \Rightarrow$ $QN = 19$ cm;
- Намираме страната QM:
  - По аналогичен начин от APMQ – четириъгълник $\Rightarrow \sphericalangle QMP = 120^0$;
  - От Косинусова теорема за $\Delta QPM \Rightarrow QP^2=QM^2 + PM^2 - 2QM.PM.\cos\sphericalangle QMP$ $= 16^2 + 14^2 - 2.16.14.\left(-\frac{1}{2}\right) = 676 \Rightarrow QP = 26$ cm;
- Намираме страната PN:
  - По аналогичен начин от PBNQ – четириъгълник $\Rightarrow \sphericalangle PMN = 120^0$;

o От Косинусова теорема за $\Delta PNM \Rightarrow PN^2=PM^2 + MN^2 - 2PM.MN.\cos \sphericalangle PMN$
$= 14^2 + 5^2 - 2.14.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 291 \Rightarrow QP = \sqrt{291}$;

IV. Задачи за упражнение:

Тестови задачи:

1. (Матура, 2010): В ΔABC $AC = 12$ cm, $BC = 8$ cm и $\sphericalangle ACB = 30^0$. Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, то лицето на ΔACL е:

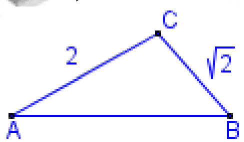


   А) 9,6 cm^2; Б) 14,4 cm^2;
   В) 16 cm^2; Г) 18 cm^2.

2. (Матура, 2011): Даден е ΔABC, за който $AC = 5\sqrt{3}$, $BC = 12$ и $S_{\Delta ABC} = 15\sqrt{3}$. Дължина на страната AB може да бъде числото:

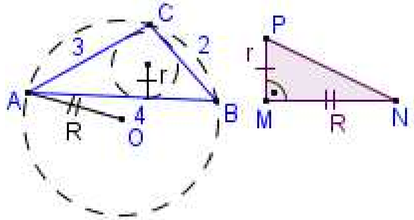
   А) $\sqrt{199}$; Б) $\sqrt{299}$; В) $\sqrt{399}$; Г) $\sqrt{499}$.

3. (Матура, 2011): Даден е ΔABC със страни $AC = 2$, $BC = \sqrt{2}$ и лице $S_{\Delta ABC} = 1$. Центърът O на описаната около триъгълника окръжност:



   А) винаги е външна точка за ΔABC;
   Б) винаги е вътрешна точка за ΔABC;
   В) може да е външна точка за ΔABC, може да е и вътрешна точка за ΔABC;
   Г) винаги лежи на AB.

4. (Матура, 2011): Страните на триъгълник са 2 cm, 3 cm и 4 cm, а R и r са радиусите на описаната и вписаната в триъгълника окръжност. Построен е правоъгълен ΔMNP с катети $MN = R$ и $MP = r$. Лицето на ΔMNP е равно на:



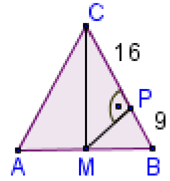
   А) $\frac{2}{3}$ cm^2; Б) $\frac{4}{3}$ cm^2;

   В) $\frac{\sqrt{15}}{12}$ cm^2; Г) $\frac{5}{32}$ cm^2.

5. (ТУ, 2010): Даден е равнобедрен триъгълник, на който основата, бедрото и височината към основата, взети в този ред, образуват геометрична прогресия. Ако лицето на триъгълника е 18 cm^2, то бедрото му е с дължина:

   А) $\sqrt{6}$ cm; Б) 12 cm; В) 6 cm; Г) 3 cm; Д) $3\sqrt{2}$ cm.

6. (Матура, 2011): В равнобедрения ΔABC на чертежа CM ($M \in AB$) е медиана към основата и $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Ако $BP= 9$ и $PC = 16$, то лицето на ΔABC е равно на:



   А) 150; Б) 300;
   В) 600; Г) 3600.

Задачи за подробно решаване:

Следват 25 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидат-студенти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидат-студентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.