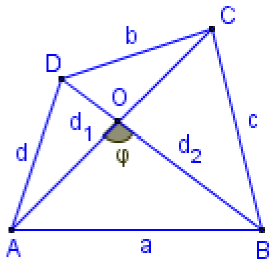
Учебен център “СОЛЕМА”
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

Четириъгълници

I. Произволен четириъгълник

- Четириъгълник вписан в окръжност:
  - Един четириъгълник е вписан в окръжност, когато сборът на два негови срещуположни ъгъла е равен на 180^0, т.е.

    (1): $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0$ и $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^0$.
  - Центърът на описаната около четириъгълник окръжност лежи на пресечната точка на симетралите му.



Фиг.1

- Четириъгълник описан около окръжност:
  - Един четириъгълник е описан около окръжност, когато сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора от другите му две страни, т.е. (Фиг. 1)

    (2): $a + b = c + d$.
  - Центърът на вписаната в четириъгълник окръжност лежи на пресечната точка на ъглополовящите му.
- Лице на произволен четириъгълник:
  - Лице чрез диагоналите d_1 и d_2 (Фиг. 1):

    (3): $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$,
  - Лице на описан четириъгълник:

    (4): $S = p.r$,

    където r – радиус на вписаната окръжност и $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.
  - Херонова формула за вписан четириъгълник:

    (5): $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

    където $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.
  - Четириъгълник едновременно вписан и описан за окръжност:

    (6): $S = \sqrt{a.b.c.d}$,

II. Успоредник и видове успоредници

Бележки:

1. Произволен успоредник не може да се впише в окръжност. Ако успоредник е вписан в окръжност, то той е правоъгълник.
2. Произволен успоредник не може да се опише около окръжност. Ако успоредник е описан около окръжност, то той е ромб.
3. Успоредникът е вид четириъгълник, затова всички твърдения изказани за четириъгълник важат и за успоредник.

- Сборът от квадратите на страните a и b на всеки успоредник е равен на полусбора от квадратите на диагоналите му d_1 и d_2 т.е.

  (7): $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.
- Лице на произволен успоредник:

  (8): $S = a h_a = b h_b = a.b.\sin\alpha = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} tg\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$,

  където е d_1 по-големия диагонал, $\alpha = \sphericalangle BAD$, φ – остър ъгъл между диагоналите му.

Бележка:

От всички успоредници с едни и същи страни a и b най-голямо лице има правоъгълникът (защото $\alpha = 90^0$).

- Ромб:
  - За диагоналите на ромб е в сила равенството, преобразувана формула (7):

    (9): $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.
  - Диагоналите на ромба са перпендикулярни и ъглополовящи на прилежащите му ъгли, затова центъра O_1 на вписаната окръжност съвпада с пресечната им точка и освен това:

    (10): $h_a = h_b = 2r$.

- Ако около ромб се опише окръжност, то той е квадрат – това следва от условие (1) за четириъгълник вписан в окръжност, т.е. около ромб не може да се опише окръжност.
- Лице на ромб:

$$(11): S = ah = a^2.\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 = a.2r,$$

където е d_1 по-големия диагонал, $\alpha = \sphericalangle BAD$, r – радиус на вписаната окръжност.

♦ Правоъгълник:

- За диагоналите на правоъгълникът е в сила равенството (преобразувана формула (7)):

$$(12): d_1 = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Ако в правоъгълник се впише окръжност, то той е квадрат – това следва от условие (2) за четириъгълник описан около окръжност, т.е. в правоъгълник не може да се впише окръжност.
- Пресечната точка на диагоналите на правоъгълника съвпада с центъра на описаната около правоъгълника окръжност.
- Лице на правоъгълник:

$$(13): S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi,$$

където d е диагонал, φ – остър ъгъл между диагоналите му.

Основни задачи:

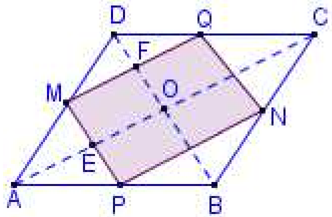
Зад. 1: Докажете, че средите на страните на:

а) произволен четириъгълник са върхове на успоредник;
б) произволен успоредник са върхове на успоредник;
в) всеки правоъгълник са върхове на ромб;
г) всеки ромб са върхове на правоъгълник.

Решение:

а) Нека точките M, N, P, Q са средите на страните на четириъгълника ABCD (Фиг. A).

- MP – средна отсечка в $\Delta ABD \Rightarrow MP \parallel BD$ и $MP = \frac{1}{2}BD$.
- NQ – средна отсечка в $\Delta BCD \Rightarrow NQ \parallel BD$ и $NQ = \frac{1}{2}BD$.
- Следователно $MP \parallel NQ$ и $MP = NQ$, т.е. MPNQ е успоредник.



Фиг. A

б) Нека точките M, N, P, Q са средите на страните на успоредника ABCD (Фиг. A). По подобен начин както в подточка а) доказваме, че MPNQ е успоредник.

в) Нека точките M, N, P, Q са средите на страните на правоъгълника ABCD (Фиг. A), а AC и BD – негови диагонали.

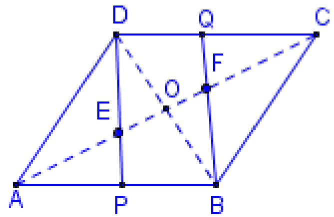
- По подобен начин както в подточка а) доказваме, че MPNQ е успоредник.
- MQ – средна отсечка в $\Delta ACD \Rightarrow MQ \parallel AC$ и $MQ = \frac{1}{2}AC$.
- Но $AC = BD$ (като диагонали в правоъгълник) $\Rightarrow MP = MQ$, т.е. MPNQ е ромб.

г) Нека точките M, N, P, Q са средите на страните на ромба ABCD (Фиг. A), а AC и BD – негови диагонали.

- По подобен начин както в подточка а) доказваме, че MPNQ е успоредник.
- ABCD – ромб и AC и BD – негови диагонали $\Rightarrow \sphericalangle AOD = 90^0$.
- $MQ \parallel AC$ и $MP \parallel BD \Rightarrow \sphericalangle MFO = \sphericalangle EOD = 90^0$ и $\sphericalangle MEO = \sphericalangle EOD = 90^0$ (като прилежащи ъгли), т.е. MPNQ е правоъгълник.

Зад. 2: В успоредника ABCD точките P и Q са среди съответно на страните AB и CD (Фиг. Б), правите DP и BQ пресичат диагонала AC съответно в точките E и F, а т. O е пресечна точка между диагоналите на успоредника. Докажете, че:

а) правите PD и BQ делят диагонала AC на три равни части;
б) $EO = \frac{1}{6}AC$;



Фиг. Б

Решение:

а)

- Доказваме, че PBQD – успоредник:
  - ABCD – успоредник ⇒ AB = CD и (A): AB || CD.
  - т. P и т. Q – среди съответно на AB и CD ⇒ (B): PB = DQ.
  - От (A) и (B) ⇒ PBQD – успоредник, т.е. (C): PD || BQ.
- Доказваме, че AE = EF = FC:
  - т. P – среда на AB и PE || BF ⇒ PE – средна отсечка в ΔABF, т.е. т. F среда на AF или (D): AE = EF.
  - По аналогичен начин от ΔEDC доказваме, че (E): EF= FC.
  - От (D) и (E) ⇒ AE = EF = FC.

б)

- В а) доказахме, че AE = $\frac{1}{3}AC$.
- т. O е среда на BD ⇒ AO – медиана в ΔABD.
- т. P е среда на AB ⇒ DP – медиана в ΔABD.
- Пресечната точка на медианите в един триъгълник се нарича медицентър, т.е. т. E е медицентър в ΔABD ⇒ OE = $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}AC \Rightarrow OE = \frac{1}{6}AC$

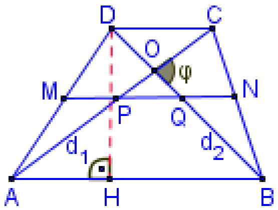
III. Трапец

Бележка:

Трапецът е вид четириъгълник, затова всички твърдения изказани за четириъгълник важат и за трапец.

- ♦ Средна основа:
  - Определение – Отсечка, съединяваща средите на бедрата на трапец.
  - Свойства – Нека точките M и N са среди съответно на бедрата AD и BC на трапеца ABCD (Фиг. 2), то средната основа MN притежава следните свойства:

    (14): MN || AB || CD и $MN = \frac{AB+CD}{2}$.
  - Среди на диагоналите на трапец – В трапец (Фиг. 2) средите на диагоналите (т.P и т. Q) лежат върху средната му основа MN.



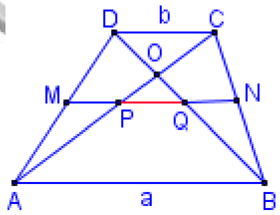
Фиг.2

Основна задача:

Зад. 3: Даден е трапец ABCD (Фиг. A) с голяма основа AB = a и малка основа CD = b. Средната основа MN пресича диагоналите AC и BD съответно в т. P и т. Q. Да се докаже, че:

а) точките P и Q са среди на диагоналите AC и BD.

б) $PQ = \frac{a-b}{2}$.



Фиг. A

Решение:

а) Т. M е среда на AD и MP || CD ⇒ MP – средна отсечка в ΔACD, т.е. т. P е среда на AC. По подобен начин доказваме, че т. Q е среда на BD.

б)

- MP – средна отсечка в ΔACD ⇒ MP = $\frac{1}{2}CD = \frac{b}{2}$.
- QN – средна отсечка в ΔBCD ⇒ QN = $\frac{1}{2}CD = \frac{b}{2}$.
- MN – средна основа в ABCD ⇒ MN = $\frac{a+b}{2}$.
- PQ = MN – (MP + QN) = $\frac{a+b}{2} - 2.\frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} - b \Rightarrow PQ = \frac{a-b}{2}$.

Учебен център "СОЛЕМА" www.solemabg.com

Бележка:

Отбележете, че средната основа на произволен трапец се дели от диагоналите му на три отсечки, две от които са равни.

- Нека за равнобедрен трапец ABCD (фиг. 2) имаме означенията AB = a, CD = b, DH – височина, тогава

  (15): $AH = \dfrac{a-b}{2};\ BH = \dfrac{a+b}{2}$.

- За сбора от квадратите на диагоналите за всеки трапец е изпълнено:

  (16): $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.

  където: a и b – голяма и малка основа, c и d – бедра, d_1 и d_2 – диагонали.
  - За равнобедрен трапец имаме $d_1 = d_2$, d = c и формула (14) добива вида

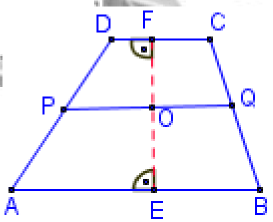
    (17): $d_1^2 = c^2 + ab$.

- Трапец описан около окръжност:
  - Ъгълът между ъглополовящите на два прилежащи ъгъла е равен на 90^0.
  - Центъра на вписаната в трапец окръжност лежи на пресечната точка на ъглополовящите му.
  - Един трапец е описан около окръжност, когато сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора от другите му две страни, т.е. изпълнено е условие (2).
  - Височината h на трапец описан около окръжност с радиус r е равна на диаметъра на окръжността, т.е.:

    (18): h = 2r.

  - При произволен трапец центърът на вписаната окръжност лежи на средната му основа.

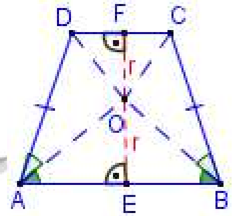
    Доказателство:
    - Нека т. O – център на вписаната в трапеца ABCD окръжност, а т. E и т. F – допирните точки на тази окръжност до основите AB и CD (Фиг. 3). Тогава т. O ∈ EF и OE = OF = r.
    - През т. O построяваме права PQ ∥ AB.
    - В трапеца AEFD имаме: OE = OF, PO ∥ AE ⇒ PO – средна основа, т.е. т. P – среда на AD.
    - По аналогичен начин от трапеца EBCF следва, че т. Q – среда на BC.



Фиг.3

    - Тогава PQ – средна основа в трапеца ABCD като т. O ∈ PQ.
  - При равнобедрен трапец центърът на вписаната окръжност разполовява средната основа.
  - При равнобедрен трапец симетралите на голямата и малката основа съвпадат, като центърът на вписаната в трапеца окръжност лежи върху тях.

    Доказателство:
    - Нека т. O – център на вписаната в равнобедрения трапец ABCD окръжност, а т. E и т. F – допирните точки на тази окръжност до основите AB и CD (Фиг. 4). Тогава AO и BO – ъглополовящи, т.е. ΔABO - равнобедрен.
    - OE = r – височина в ΔABO ⇒ OE – медиана, т.е. OE – симетрала на AB.
    - По аналогичен начин доказваме, че ΔDCO – равнобедрен и OF - симетрала на CD.



Фиг.4

- Трапец вписан в окръжност:
  - Центъра на описаната около трапец окръжност лежи на пресечната точка на симетралите (симетралите на голямата и малка основа съвпадат).
  - Един трапец е вписан в окръжност, когато сборът на два негови срещуположни ъгъла е равен на 180^0, т.е изпълнено е условие (1).
  - Ако един трапец е вписан в окръжност, то той е равнобедрен, т.е. около всеки равнобедрен трапец може да се опише окръжност.
- Лице на трапец (Фиг. 2):

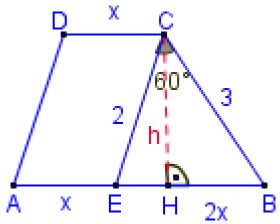
  (19): $S = MN.h = \dfrac{a+b}{2}h$.

- Основни построения при трапец:

Зад. 4: В трапец едната основа е три пъти по-голяма от другата основа. Дължините на бедрата му са 2 cm и 3 cm, а ъгълът между тях е 60^0. Намерете лицето на трапеца.

Решение: Построяваме CE ∥ AD. Тогава ъгълът между бедрата на трапеца е $\sphericalangle BCE = 60^0$, AECD – успоредник, т.е. CE = 2, AE = DC = x, BE = 2x или AB = 3x.

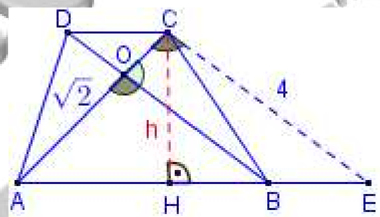
- От Косинусова теорема за $\Delta EBC \Rightarrow BE^2 = CE^2 + BC^2 - 2CE.BC.\cos\sphericalangle BCE \Rightarrow (2x)^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2}$;



- $CD = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $BE = \sqrt{7}$, $AB = \frac{3\sqrt{7}}{2}$;
- Намираме височината CH на трапеца, която е височина и на ΔEBC
  - $S_{\Delta EBC} = \frac{1}{2}\, CE.BC.\sin\sphericalangle ECB = \frac{1}{2}\, 2.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
  - $S_{\Delta EBC} = \frac{1}{2}\, EB.CH \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}\,h}{2} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;
- $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}h = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow S_{ABCD} = 3\sqrt{3}$.

Зад. 5: Даден е трапец с диагонали $\sqrt{2}$ cm и 4 cm и ъгъл между диагоналите 45^0. Намерете лицето на трапеца.

<u>Решение:</u> Построяваме CE || BD $\Rightarrow$ $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AOB$ (като кръстни ъгли).



- AE = AB + BE, но BE = CD$\Rightarrow$AE=AB+CD;
- CH – височина на трапеца ABCD, но тя е височина и на $\Delta AEC \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\Delta AEC}$;
- $S_{\Delta AEC} = \frac{1}{2}\, AC.CE.\sin\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.4.\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\Delta AEC} = 2$ cm.

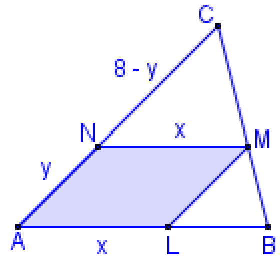
Бележка:

Предполагаме, че по условие е даден $\sphericalangle AOB = 45^0$. Ако допуснем, че е даден $\sphericalangle BOE = 45^0$, то $S_{\Delta AEC}$ е отново 2 cm, защото от $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AOB \Rightarrow$ $\sin\sphericalangle ACE = \sin\sphericalangle AOB = \sin(180^0 - \sphericalangle BOE) = \sin\sphericalangle BOE$.

IV. Основни типови задачи:

Зад. 6: Върху страните AB, BC и AC на ΔABC са избрани съответно точките L, M и N така, че LM || AC, MN || AB. Намерете страните на успоредника ALMN, ако периметърът му е 18 cm, AC = 8 cm, AB = 12 cm.

<u>Решение:</u> Нека AL = MN = x, AN = LM = y, тогава CN = AC – AN = 8 – y.



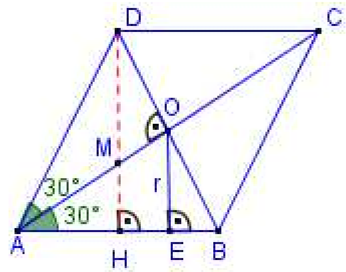
- $\Delta NMC \sim \Delta ABC$ (по I признак, защото $\sphericalangle C$ – общ и $\sphericalangle MNC = BAC$ като съответни ъгли на AB || MN) $\Rightarrow$ $\frac{NM}{AB} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{8-y}{8} \Rightarrow$ (A): 2x + 3y = 24;
- $P_{ALMN} = 2x + 2y \Rightarrow 2x + 2y = 18 \Rightarrow$ (B): x + y = 9;
- От (A) и (B) $\Rightarrow$
$$\left|\begin{array}{l}2x+3y=24\\ x+y=9 \,|.(-2)\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}2x+3y=24\\ -2x-2y=-18\end{array}\right\} + \Rightarrow y=6,\ x=3$$
- AL = MN = x = 3 cm, AN = LM = 6 cm.

Зад. 7: В ромб ABCD е вписана окръжност с радиус r, a $\sphericalangle BAD = 60^0$.

а) Да се намерят диагоналите и страните на ромба ABCD.
б) Да се намери разстоянието между центровете на описаните окръжности около ΔABC и ΔABD.

<u>Решение:</u>

а) $\Delta ABCD$ – ромб и $\sphericalangle BAD = 60^0 \Rightarrow \sphericalangle AOD = 90^0$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD = 30^0$, OE = r.



- В ΔAED $\sphericalangle AEO = 90^0$, $\sphericalangle OAE = 30^0 \Rightarrow AO = CO = 2OE = 2r \Rightarrow AC = 4r$.
- В ΔAOD $\sphericalangle AOD = 90^0$, $\sphericalangle OAD = 30^0 \Rightarrow$ tg $\sphericalangle OAD = \frac{OD}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OD}{2r} \Rightarrow OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$;
- $BD = 2OD = \frac{4\sqrt{3}}{3}r$;

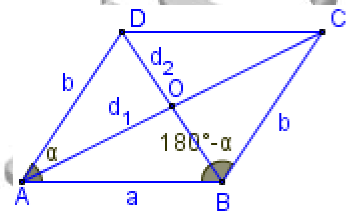
- ΔABD – равнобедрен ($AB = AD$) и $\sphericalangle BAD = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ – равностранен, т.е.
  $AB = BD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}r$.

б) Нека DH – височина в трапеца ABCD.

- Намираме центъра на описаната около ΔABD окръжност:
  - ΔABD – равностранен, AO и DH – височини следователно, те са и симетрали, т.е. центъра на описаната около ΔABD окръжност е точка M.
- Намираме центъра на описаната около ΔABC окръжност:
  - ABCD – ромб $\Rightarrow AD = DC$.
  - ΔABD – равностранен (по доказателство) $\Rightarrow AD = BD$.
  - $AD = BD = CD = R$, т.е. центъра на описаната около ΔABC окръжност е точка D.
- Търсеното разстояние е отсечката DM:
  - От (9) $\Rightarrow DH = 2r$;
  - ΔABD – равностранен и AO и DH – медиани $\Rightarrow$ т.M – медицентър, т.е.
    $DM = \dfrac{2}{3}DH = \dfrac{2}{3}2r \Rightarrow DM = \dfrac{4}{3}r$.

Зад. 8: Диагоналите на успоредника ABCD са $AC = d_1$ и $BD = d_2$ ($d_1 > d_2$), а $\sphericalangle A = \alpha$. Да се намери лицето на успоредника (ГФ. 63).

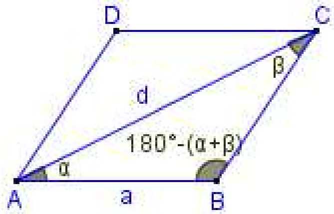
Решение:



- От (11) $\Rightarrow S_{ABCD} = a.b.\sin\alpha$. Изразяваме a.b чрез d_1 и d_2:
  - От Косинусова теорема за $\Delta ABD \Rightarrow$
    (A): $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$;
  - $AD \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180^0 \Rightarrow$
    $\sphericalangle ABC = 180^0 - \alpha$;
  - От Косинусова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow$
    (B): $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^0 - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$;
  - Изваждаме (A) от (B) $\Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = 4ab\cos\alpha \Rightarrow ab = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}$;
  - $S_{ABCD} = a.b.\sin\alpha = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}tg\alpha$

Зад. 9: Диагоналът, прекаран през върха на острия ъгъл на един успоредник, има дължина d и сключва със съседните страни ъгли α и β. Да се намери лицето на успоредника. (МГУ, 1995).

Решение:

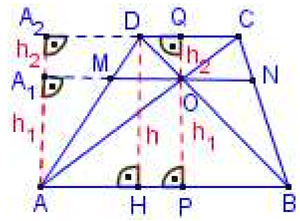


- От $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle ABC = 180^0 - (\alpha + \beta)$;
- От Синусова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow$
  $\dfrac{a}{\sin\beta} = \dfrac{d}{\sin[180^0 - (\alpha+\beta)]} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin\beta} = \dfrac{d}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow$
  $a = \dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$
- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a.d.\sin\alpha = \dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$
- $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Зад. 10: Дължините на основите на трапец са a и b. Отсечката, минаваща през пресечната точка на диагоналите на трапеца (т.O) и успоредна на основите му, пресича бедрата BC и AD съответно в точките N и M.

а) Да се докаже, че точка O е среда на MN.
б) Да се намери MN.

Решение:



а) Нека $AA_1 = OP = h_1$ – височина на ΔMOA и ΔABO, $QO = h_2$ – височина на ΔDCO, $AA_2 = DH = h = h_1 + h_2$ – височина на трапеца ABCD и ΔDCA.

- $\Delta MOA \sim \Delta DCA$ (по I признак, защото $\sphericalangle CAD$ – общ, $\sphericalangle OMA = \sphericalangle CDA$ – като съответни ъгли на $MO \parallel CD$) $\Rightarrow \dfrac{MO}{CD} = \dfrac{A_1A}{A_2A} \Rightarrow$ (A): $MO = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2}CD$;
- $\Delta NOB \sim \Delta CDB$ (по I признак, защото $\sphericalangle CBD$ – общ, $\sphericalangle ONB = \sphericalangle DCB$ – като съответни ъгли на $NO \parallel CD$) $\Rightarrow \dfrac{NO}{CD} = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2} \Rightarrow (B)$: $NO = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2}CD$;
- От (A) и (B) $\Rightarrow MO = NO$, т.е. т. O е среда на MN.

б) От а) $\Rightarrow MO = NO$, т.е. $MN = 2MO$. намираме MO:

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg
==

- $\Delta AOB \sim \Delta COD$ (по I признак, защото $\sphericalangle OAB = \sphericalangle DCO$ – като кръстни ъгли на $AB \parallel CD$, $\sphericalangle DOC = \sphericalangle AOB$ – като връхни ъгли) $\Rightarrow$
$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OP}{OQ} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_2 = \dfrac{b.h_1}{a}$;
- Заместваме в (A) $\Rightarrow$ $MO = \dfrac{h_1}{h_1 + \dfrac{b h_1}{a}} b = \dfrac{a.b}{a+b}$
- $MN = 2MO = \dfrac{2a.b}{a+b} \Rightarrow MN = \dfrac{2ab}{a+b}$

Зад. 11: В равнобедрен трапец ABCD основите са AB = 10 cm, CD = 4 cm, а бедрото е AD = 5 cm. Намерете:

а) диагонала на трапеца;

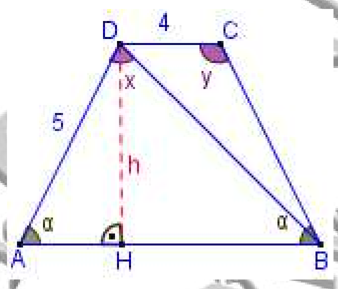
б) синуса на $\sphericalangle ADB$;

в) косинуса на $\sphericalangle ACD$;

г) радиуса на описаната и вписаната окръжност.

<u>Решение:</u>

а)



- ABCD – равнобедрен трапец и от (13) $\Rightarrow$
$AH = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{10-4}{2} = 3\ cm$;
$HB = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{10+4}{2} = 7\ cm$;
- От Питагорова теорема за $\Delta AHD \Rightarrow h^2 = AD^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h = 4$ cm;
- От Питагорова теорема за $\Delta BHD \Rightarrow BD^2 = h^2 + BH^2 = 16 + 49 \Rightarrow BD = \sqrt{65}$.

б) Нека $\sphericalangle ADB = x$, $\sphericalangle BAD = \alpha$.

- ΔAHD – правоъгълен $\Rightarrow$ (A): $\sin\alpha = \dfrac{h}{AD} = \dfrac{4}{5}$;
- От Синусова теорема за $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{AB}{\sin x} = \dfrac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow \dfrac{10}{\sin x} = \dfrac{\sqrt{65}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow$

$\sin x = \sin \sphericalangle ADB = 8\sqrt{65}$.

в) Нека $\sphericalangle DCB = y$, но ABCD равнобедрен трапец $\Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAD = \alpha$.

- ΔAHD – правоъгълен $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{3}{5}$;
- $AB \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle DCB = 180^0 - \sphericalangle ABC = 180^0 - \alpha$;
- $\cos \sphericalangle DCB = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

г) Описаната около трапеца окръжност е същата както и описаната около ΔABD окръжност, затова намираме радиуса на описаната около ΔABD окръжност.

- От Синусова теорема за $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{AB}{\sin x} = 2R \Rightarrow \dfrac{10}{8\sqrt{65}} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{65}}{104}$;
- $AB \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle DCB = 180^0 - \sphericalangle ABC = 180^0 - \alpha$;
- $\cos \sphericalangle DCB = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

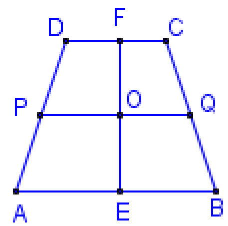
Радиуса на вписаната окръжност в трапеца намираме от (16), т.е. 2r=h=4 $\Rightarrow$ r = 2 cm.

Зад. 12: Даден е трапец ABCD с бедра AD = 3 cm и BC = 5 cm, в който може да се впише окръжност. Средната основа на трапеца го дели на две части, лицата на които се отнасят както 5 : 11

а) Да се докаже, че центърът на вписаната в трапеца окръжност лежи на средната му основа;

б) Да се намерят основите на трапеца.

<u>Решение:</u>



а) Нека окръжността вписана в трапеца се допира до основите AB и CD съответно в т. E и т. F, и т. O – център на окръжността, тогава т. O $\in$ EF.

- През т. O построяваме права $PQ \parallel AB$;
- В трапеца AEFD имаме: т.O – среда на EF, PO||AE $\Rightarrow$ PO – средна основа в трапеца, т.е. т. P е среда на AD;
- По аналогичен начин от трапеца EBCF следва, че т. Q е среда на BC;
- Тогава PQ – средна основа в трапеца ABCD.

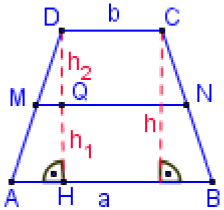
б) Нека AB = a, CD = b, DH = h.

- Намираме едно уравнение с неизвестни a и b – ABCD – описан трапец и от (2) $\Rightarrow$AB+CD=AD+BC$\Rightarrow$a + b=8, т.е. (A): a = 8 – b.

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

- Ще намерим още едно уравнение със същите две неизвестни a и b:
  - MN – средна основа в трапеца ABCD ⇒ $MN = \frac{a+b}{2} = \frac{8}{2} = 4$;
  - В ΔAHD т. M – среда на AD и MQ ∥ AH ⇒ т. Q – среда на DH, т.е. $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$;
  - По условие имаме

$$\frac{11}{5} = \frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{AB+MN}{2}h_1}{\frac{MN+CD}{2}h_2} = \frac{\frac{a+4}{2}\cdot\frac{1}{2}h}{\frac{4+b}{2}\cdot\frac{1}{2}h} \Rightarrow (B): 5a - 11b = 24$$



- Заместваме (A) в (B) ⇒ 5(8 – b) – 11b = 24, т.е. b = 1; a = 8 – b = 8 – 1 = 7, т.е. AB = 7 cm, CD = 1 cm.

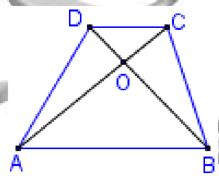
V. Задачи за упражнение:

Тестови задачи:

Подобни триъгълници

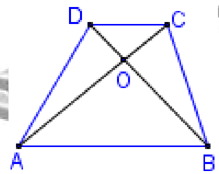
1. (Матура, 2010): На чертежа ABCD (AB ∥ CD) е трапец, чиито диагонали се пресичат в точка O и лицето на ΔDCO е 7 cm^2, а лицето на ΔABO е 28 cm^2. Отношението DO : BO е равно на:

   А) 1 : 2; Б) 1 : 3;
   В) 1 : 4; Г) 4 : 1.



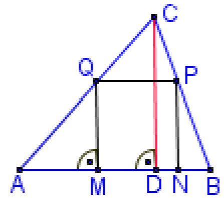
2. (Матура, 2010): В трапец ABCD(AB ∥ CD) диагоналите се пресичат в точка O и AC : OC = 5 : 2. Ако AB = 30 cm, то CD е:

   А) 12 cm; Б) 15 cm;
   В) 20 cm; Г) 24 cm.



3. (Матура, 2011): В остроъгълния ΔABC е вписан квадратът MNPQ, както е показано на чертежа. Ако AB = 6, CD = 4 да се намери дължината на страната на квадрата.

   А) 1,2;
   Б) 2,4;
   В) 3;
   Г) 3,6.



4. (ТУ, 2012): В правоъгълен трапец ABCD с голяма основа AB = 6 cm и ∢ADC=90^0, разстоянието от пресечната точка на диагоналите до бедрото AD е 2 cm. Дължината на малката основа CD в cm е:

   А) 3, 5; Б) 4; В) 5; Г) 2, 5; Д) 3.

Синусова и Косинусова теорема. Елементи четириъгълници

5. (Матура, 2010): В успоредник ABCD AB = 8 cm, AD = 7 cm. Ако ∢BAD = 60^0, то дължината на диагонала AC е:

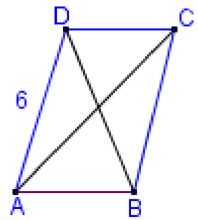
   А) $\sqrt{57}$ cm; Б) 13 cm; В) 15 cm; Г) $\sqrt{337}$ cm.

6. (ТУ, 2011): В равнобедрен трапец ABCD диагоналът е 10 cm и sin ∢ABC = $\frac{2}{7}$. Радиусът на описаната около трапеца окръжност в cm е:

   А) 35; Б) $\frac{10}{7}$; В) $\frac{5}{7}$; Г) $\frac{1}{70}$; д) 17, 5.

7. (Матура, 2011): За успоредника ABCD на чертежа AD = 6, AC = $2\sqrt{19}$ и BD = 4. Дължината на страната AB е равна на:

   А) $\sqrt{10}$; Б) $\sqrt{18}$;
   В) $\sqrt{41}$; Г) 10.

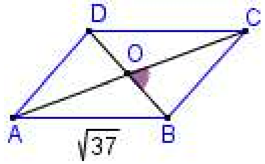


8. (ТУ, 2010): Страните на успоредник са 8 cm и 16 cm. Ако единият от диагоналите му е 10 cm, то дължината на другия диагонал е:

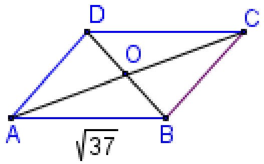
   А) $2\sqrt{55}$ cm; Б) $3\sqrt{15}$ cm; В) 10 cm; Г) $6\sqrt{15}$ cm; Д) 8 cm.

Учебен център “СОЛЕМА”
www.solema.hit.bg

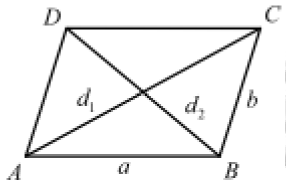
9. (Матура, 2010): В успоредника ABCD $AB = \sqrt{37}$, $AC = 8$ и $BD = 6$. Острият ъгъл между диагоналите на успоредника е:
А) 15^0; Б) 30^0;
В) 45^0; Г) 60^0.



10. (Матура, 2011): В успоредника ABCD $AB = \sqrt{37}$, $AC = 8$ и $BD = 6$. Дължината на страната BC е равна на:
А) $10\sqrt{3}$ cm; Б) $\sqrt{37}$ cm;
В) $\sqrt{13}$ cm; Г) $\sqrt{10}$ cm.

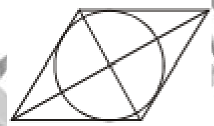


11. (Матура, 2012): За страните a и b и диагоналите d_1 и d_2 на успоредник са в сила равенствата $a.b = 2,5$ и $d_1^2 + d_2^2 = 26$. Периметърът на успоредника е:
А) $6\sqrt{2}$; Б) $3\sqrt{2}$;
В) 2; Г) 1, 5.



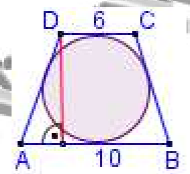
12. (ТУ, 2012): Даден е ромб с големина на острия ъгъл 30^0 и страна 5 cm . Радиусът на вписаната в ромба окръжност в cm е:
А) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{5}{8}$; В) $\frac{5}{4}$; Г) $\frac{4}{5}$; Д) 2, 5.

13. (Матура, 2012): Страната на ромб е 12 cm и острият му ъгъл е 60^0. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:
А) 3 cm; Б) $\sqrt{3}$ cm;
В) 6 cm; Г) $6\sqrt{3}$ cm.



14. (ТУ, 2010): В равнобедрен трапец с основи AB = 6 cm и CD = 2 cm е вписана окръжност. Радиусът на тази окръжност е:
А) $2\sqrt{3}$ cm; Б) $\sqrt{5}$ cm; В) $\sqrt{3}$ cm; Г) 3 cm; Д) 2 cm.

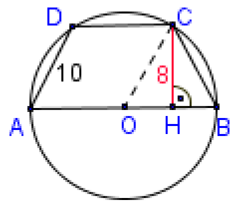
15. (Матура, 2011): В равнобедрен трапец с основи 6 cm и 10 cm е вписана окръжност. Радиусът на окръжността е:
А) $\sqrt{15}$ cm; Б) $\sqrt{17}$ cm;
В) $2\sqrt{15}$ cm; Г) $2\sqrt{17}$ cm.



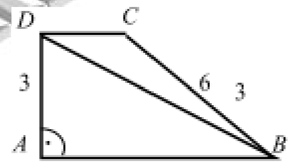
16. (Матура, 2010): Да се намери радиусът на окръжността, описана около трапец с основи 9 cm и 3 cm и ъгъл при малката основа $\alpha = 120^0$.
А) $\sqrt{7}$ cm; Б) 7 cm; В) $\sqrt{21}$ cm; Г) 21 cm.

17. (ТУ, 2012): В равнобедрен трапец ABCD голямата основа е 8 cm. Ако бедрото AD сключва с диагонала BD ъгъл 45^0 , то радиусът на описаната около трапеца окръжност е:
А) $4\sqrt{2}$ cm; Б) 8 cm; В) $8\sqrt{2}$ cm; Г) $4\sqrt{3}$ cm; Д) 4 cm.

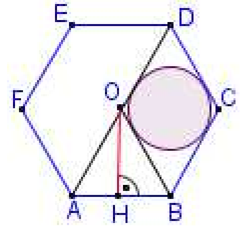
18. (Матура, 2011): Трапецът ABCD е вписан в окръжност, като AB е диаметър. Ако височината на трапеца е CH = 8, а бедрото AD = 10, то радиусът на окръжността е:
А) $\frac{11}{3}$; Б) $\frac{25}{4}$;
В) $\frac{25}{3}$; Г) 12.



19. (Матура, 2012): Даден е правоъгълен трапец ABCD с бедра AD = 3 cm и BC = 6 cm. Отношението на радиусите на окръжностите, описани съответно около ΔABD и ΔBCD, е равно на:
А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
В) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; Г) $\frac{2}{1}$.



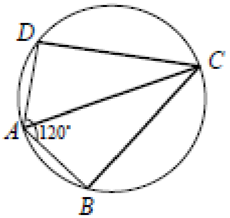
20. (Матура, 2011): На чертежа ABCDEF е правилен шестоъгълник. Ако в него е вписана окръжност с радиус $OH = 3\sqrt{3}$, то радиусът на окръжността, вписана в четириъгълника OBCD, е равен на:
А) $\sqrt{3}$; Б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
В) 3; Г) $2\sqrt{3}$.



21. (ТУ, 2012): Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност с радиус $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm и $\sphericalangle DCB = 120^0$. Дължината на диагонала DB в cm е:
А) $7\sqrt{3}$; Б) 7; В) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{28}{3}$; Д) $\frac{14}{3}$.

Учебен център СОЛЕМА www.solemabg.com

22. (Матура, 2012): Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност и $\sphericalangle DAB = 120^0$. Ако BD = 12 cm и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, то диагоналът AC е равен на:

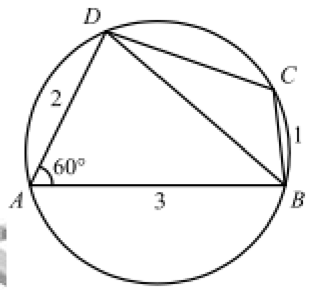


А) $8\sqrt{3}$ cm; Б) $8\sqrt{2}$ cm;
В) $6\sqrt{3}$ cm; Г) $4\sqrt{3}$ cm.

23. (Матура, 2012): Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност. Ако AC = $\sqrt{21}$ cm, DC = 5 cm и AD = 4 cm, $\sphericalangle ABC$ е равен на:

А) 150^0; Б) 120^0; В) 60^0; Г) 30^0.

24. (Матура, 2012): Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност. Ако AB = 3, AD = 2, BC = 1 и $\sphericalangle BAD = 60^0$, то страната CD е равна на:



А) $4\sqrt{3}$; Б) $2\sqrt{3}$;
В) $\sqrt{3}$; Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Лице четириъгълници

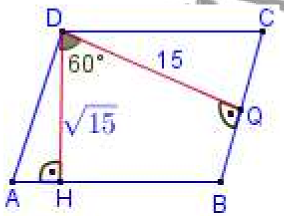
25. (ТУ, 2011): Диагоналът BD на успоредник ABCD е 3 cm, $\sphericalangle BCD = 45^0$, а описаната около ΔBCD окръжност се допира до правата AB. Лицето на успоредника ABCD е:

А) 6 cm^2; Б) $3\sqrt{3}$ cm^2; В) 8 cm^2; Г) 9 cm^2; Д) 10 cm^2.

26. (Матура, 2010): Даден е успоредник ABCD със страна AD = 4 cm, диагонал BD = $4\sqrt{3}$ cm и $\sphericalangle ADC = 120^0$. Лицето на успоредника е:

А) $16\sqrt{3}$ cm^2; Б) 16 cm^2; В) $8\sqrt{3}$ cm^2; Г) 8 cm^2.

27. (Матура, 2012): В успоредника ABCD височините DH и DQ са съответно $\sqrt{15}$ и 15. Ако $\sphericalangle HDQ = 60^0$, то лицето на успоредника е:



А) $10\sqrt{3}$; Б) $15\sqrt{5}$;
В) $30\sqrt{5}$; Г) $50\sqrt{3}$.

28. (ТУ, 2010): Височината DH на ромба ABCD разделя страната му AB на части AH = 3 cm, HB = 2 cm. Ако диагоналът AC и отсечката DH се пресичат в т. M, то лицето на ΔAHM в cm^2 е:

А) $\dfrac{15}{4}$; Б) 6; В) 20; Г) $\dfrac{3}{5}$; Д) $\dfrac{9}{4}$.

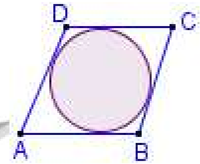
29. (ТУ, 2011): Лицето на ромб с диагонали 3,4 cm и 2,5 cm е:

А) 8,5 cm^2; Б) 42,5 cm^2; В) 85 cm^2; Г) $4{,}25\sqrt{3}$ cm^2; Д) 4,25 cm^2.

30. (Матура, 2011): Лицето на ромб ABCD с диагонал AC = $4\sqrt{3}$ и $\sphericalangle ABC = 120^0$ е:

А) $2\sqrt{3}$; Б) 8; В) $6\sqrt{3}$; Г) $8\sqrt{3}$.

31. (Матура, 2011): Лицето на ромб е равно на 24, а сумата от дължините на диагоналите му е равна на 14. Лицето на вписания в ромба кръг е равно на:



А) 2,4 π; Б) 4,8 π;
В) 5, 76 π; Г) 7, 2 π.

32. (ТУ, 2012): Дължината на страна на ромб е 5 cm, а сборът от дължините на диагоналите му е 14 cm. Лицето на ромба в cm^2 е:

А) 96; Б) $12\sqrt{2}$; В) 12; Г) 20; Д) 24.

33. (ТУ, 2012): Лицето на ромб с остър ъгъл 45^0 и страна 4 cm е:

А) 16 cm^2; Б) $4\sqrt{2}$ cm^2; В) $4\sqrt{3}$ cm^2; Г) $8\sqrt{2}$ cm^2; Д) $8\sqrt{3}$ cm^2.

34. (Матура, 2012): Даден е ромб с диагонали a и b. Лицето на четириъгълника, чиито върхове са средите на страните на ромба, е:

А) $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{2}$; Б) $\dfrac{a^2+b^2}{4}$; В) $\dfrac{ab}{4}$; Г) $\dfrac{ab}{2}$.

35. (Матура, 2010): Окръжност с радиус 4 cm е вписана в равнобедрен трапец. Ако малката основа на трапеца е равна на радиуса на окръжността, лицето на трапеца е:

А) 80 cm^2; Б) 96 cm^2; В) 160 cm^2; Г) 192 cm^2.

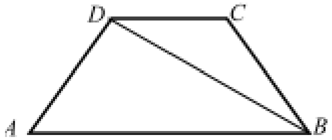
36. (Матура, 2011): В равнобедрен трапец височината е равна на 6 cm, а диагоналите му са взаимно перпендикулярни. Лицето на трапеца е равно на:

А) 36 cm^2; Б) $36\sqrt{2}$ cm^2; В) $36\sqrt{3}$ cm^2; Г) $36\sqrt{5}$ cm^2.

37. (Матура, 2012): Трапецът ABCD (AB ∥ CD) със страни AB = 10, BC = 10, CD=4 и AD = 5 е с лице, равно на:

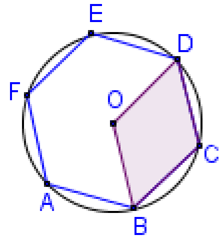
А) $2\sqrt{6}$; Б) $6\sqrt{6}$; В) $14\sqrt{6}$; Г) $42\sqrt{6}$.

38. (Матура, 2012): В равнобедрен трапец диагоналът има дължина $6\sqrt{3}$ cm и сключва с голямата основа ъгъл 30^0. Лицето на трапеца е:



А) $27\sqrt{3}$ cm^2; Б) $18\sqrt{3}$ cm^2;
В) $9\sqrt{3}$ cm^2; Г) $4,5\sqrt{3}$ cm^2.

39. (Матура, 2010): Даден е правилен шестоъгълник ABCDEF. Ако точката O е центърът на описаната около шестоъгълника окръжност с радиус 2 , то S_{OBCD} е равно на:



А) $4\sqrt{3}$; Б) $2\sqrt{3}$;
В) $\sqrt{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задачи за подробно решаване:

Следват 65 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидат-студенти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидат-студентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.

Учебен център СОЛЕМА www.solemabg.com