

## Тригонометрични уравнения и неравенства

### I. Тригонометрична окръжност

Окръжност  $k$  с център  $O$  и радиус  $1$ .

### II. Обобщен ъгъл

Ъгълът, който се получава при завъртането на точка  $M$  по тригонометричната окръжност, се нарича обобщен ъгъл. На фиг. 1 обобщеният ъгъл може да бъде:  $\alpha$ ;  $\alpha \pm 360^\circ$ ;  $\alpha \pm 2.360^\circ$  и т.н. Виждаме, че обобщеният ъгъл може да се получи при ротация на ъгъла:  $\alpha + k.360^\circ$ , (1) където  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$  е броят на оборотите (т.е. броят на завъртанятия на второто рамо на ъгъла).

#### Бележка:

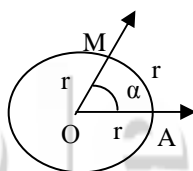
Навсякъде в този урок числото  $k$  е произволно цяло число, за което имаме  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$  т.е.  $k \in \mathbb{Z}$ .

### III. Радиан

Всеки ъгъл може да се измерва с градусни мерки или радиани. Централен ъгъл, за който дължината на съответната му дъга е равна на радиуса на окръжността, се нарича радиан (rad). На фиг. 1 се вижда, че  $\sphericalangle AOM = \alpha \text{ rad}$

Превръщането от едната мерна единица в другата се извършва по следния начин:

$$\frac{\alpha^\circ}{180} \cdot \pi = x \text{ rad} \qquad \frac{\alpha}{\pi} 180 = x^\circ \qquad (2)$$



Фиг. 1

#### Бележка:

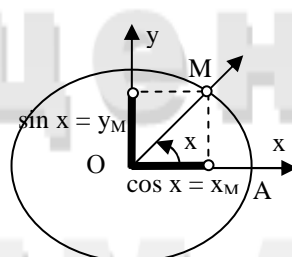
След градусната мярка се поставя знака за градус "°", а след радианната мярка не се записва означението rad

## IV. Тангенсова и котангенсова ос

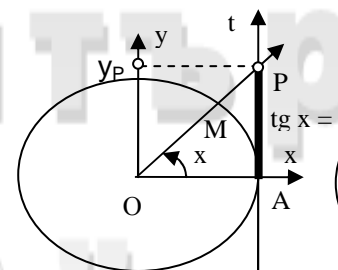
Нека да имаме обобщен  $\sphericalangle AOM$ :

- ♦ Тангенсова ос – Оста  $At^{\rightarrow}$ , която е допирателна до точка  $A$  (фиг. 3);
- ♦ Котангенсова ос – Оста  $Bc^{\rightarrow}$ , която е допирателна до точка  $B$  (фиг. 4);

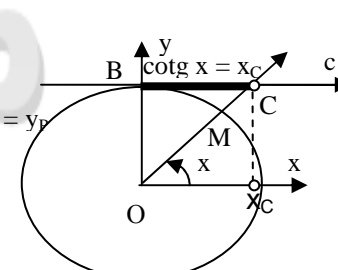
## V. Тригонометрични функции и свойствата им:



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\sin x$

- ♦ Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл  $x$  ординатата  $y_M$  на точка  $M$  (Фиг. 2). Графиката е синусоида (Фиг. 9)
- ♦ ДМ:  $\forall x$ ;
- ♦ Функцията е периодична с период  $2\pi$  т.е.  $\sin x = \sin(x \pm 2\pi)$ ;
- ♦ Функцията е нечетна, т.е.  $\sin(-x) = -\sin x$ ;
- ♦ Приема най-голяма стойност  $1$  при  $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ ;
- ♦ Приема най-малка стойност  $-1$  при  $x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$ ;
- ♦ Приема стойност  $0$  при  $x = k.\pi$ ;
- ♦ Расте от  $-1$  до  $1$  във всеки интервал  $[-\frac{\pi}{2} + k.2\pi; \frac{\pi}{2} + k.2\pi]$ ;
- ♦ Намалява от  $+1$  до  $-1$  във всеки интервал  $[\frac{\pi}{2} + k.2\pi; \frac{3\pi}{2} + k.2\pi]$ ;

### COS X

- ◆ Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл X абсцисата  $X_M$  на точка M (Фиг. 2). От равенството  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  следва, че графиката на COS X се получава от синусоидата изместена (транслирана) наляво по оста X, на разстояние  $\frac{\pi}{2}$  (Фиг. 11);
- ◆ ДМ:  $\forall x$ ;
- ◆ Функцията е периодична с период  $2\pi$  т.е.  $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$ ;
- ◆ Функцията е четна, т.е.  $\cos(-x) = \cos x$ ;
- ◆ Приема най-голяма стойност 1 при  $x = k\pi$ ;
- ◆ Приема най-малка стойност -1 при  $x = \pi + k.2\pi$ ;
- ◆ Приема стойност 0 при  $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ ;
- ◆ Расте от -1 до 1 във всеки интервал  $[-\pi + k.2\pi; k.2\pi]$ ;
- ◆ Намалява от +1 до -1 във всеки интервал  $[k.2\pi; \pi + k.2\pi]$ ;

### tg x

- ◆ Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл X ординатата  $Y_P$  на точка P, която е пресечна точка между тангенсова ос  $At^{\rightarrow}$  и второто рамо на обобщения ъгъл X (Фиг. 3). На координатната система графиката е показана на Фиг. 13;
- ◆ ДМ:  $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ;
- ◆ Функцията е периодична с период  $\pi$  т.е.  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm k\pi)$ ;
- ◆ Функцията е нечетна, т.е.  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ . Затова графиката и в интервала  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  е симетрична на графиката и в интервала  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  относно началото на координатната система;
- ◆ Няма най-голяма и най-малка стойност;
- ◆ Приема стойност 0 при  $x = k\pi$ ;
- ◆ Расте от  $-\infty$  до  $+\infty$  във всеки интервал  $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ ;

### Бележка:

Функцията  $y = \operatorname{tg} x$  е растяща в интервала  $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , но не е растяща в интервал, съдържащ точките в които функцията не е дефинирана, т.е. точки от вида  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Например: функцията  $y = \operatorname{tg} x$  не е растяща в интервала  $(0; \pi)$ .

### cotg x

- ◆ Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл X абсцисата  $X_C$  на точка C, която е пресечна точка между котангенсова ос  $Bc^{\rightarrow}$  и второто рамо на обобщения ъгъл X (Фиг. 4). На координатната система графиката и е показана на Фиг. 15;
- ◆ ДМ:  $\forall x \neq k\pi$ ;
- ◆ Функцията е периодична с период  $\pi$  т.е.  $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x \pm k\pi)$ ;
- ◆ Функцията е нечетна, т.е.  $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ ;
- ◆ Няма най-голяма и най-малка стойност;
- ◆ Приема стойност 0 при  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ;
- ◆ Намалява от  $+\infty$  до  $-\infty$  във всеки интервал  $(k\pi; \pi + k\pi)$ ;

### Бележка:

Функцията  $y = \operatorname{cotg} x$  е намаляваща в интервала  $(k\pi; \pi + k\pi)$ , но не е намаляваща в интервал, съдържащ точки, в които функцията не е дефинирана, т.е. точки от вида  $x = k\pi$ . Например: функцията  $y = \operatorname{cotg} x$  не е намаляваща в интервала  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

## VIII. Тригонометрични уравнения

Уравнения, при които неизвестното се съдържа само под знака на тригонометричната функция. Например: уравнението  $\cos x + x = 1$ , не е тригонометрично.

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

Основните тригонометрични уравнения и техните решения са представени в следната таблица:

Таблица № 3

У-ние:	$1 < a < -1$ т.е. $ a  > 1$	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	$-1 < a < 1$ т.е. $ a  < 1$
$\sin x = a$	н.р.	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	(А): $x = \alpha + 2k\pi$ (В): $x = \pi - \alpha + 2k\pi$
$\cos x = a$	н.р.	$x = \pi + 2k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = 2k\pi$	(А): $x = \alpha + 2k\pi$ (В): $x = -\alpha + 2k\pi$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \alpha + k\pi$	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = \alpha + k\pi$
$\operatorname{cotg} x = a$	$x = \alpha + k\pi$	$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = \alpha + k\pi$

### Бележки:

1. Решенията (А) и (В) не са броя на решенията, а броя на групите решения. Тригонометричните уравнения имат безброй много решения (защото графиката на тригонометричната функция пресича много пъти права успоредна на абсцисната ос.
2. Уравненията  $\operatorname{tg} x = a$  и  $\operatorname{cotg} x = a$  имат решения за  $\forall a$ , а уравненията  $\sin x = a$  и  $\cos x = a$  имат решения за  $a \in [-1; 1]$ .

Начини за решаване на тригонометрични уравнения:

- ◆ Основни тригонометрични уравнения – Решават се по таблица №3. Дадено уравнение може да се преобразува до основно чрез използването на Тригонометрични формули;

Зад. 1:  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Решение:

И начин:

От таблица № 1 (виж Таблицы) определяме стойността на  $\cos$ , а основното уравнение решаваме от таблица №3:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}, \alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

И начин:

От таблица № 1 (виж Таблицы) определяме стойността на  $\alpha$ , а основното уравнение решаваме от таблица №3:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

### Бележка:

Ако в множеството ъгли от вида  $\alpha + k\beta$  параметъра  $k$  се замени с  $k \pm m$ , където  $m$  е цяло число, множеството не се променя. Например: в множеството  $\frac{\pi}{6} + k\pi$  нека да заменим  $k$  с  $k+1$ , то полученото множество  $\frac{\pi}{6} + (k+1)\pi = \frac{7\pi}{6} + k\pi$  не се променя.

Зад. 2:  $\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

(1993; ВБОУ)

Решение: За дясната част използваме формула (65) от Тригонометрични формули и получаваме основно уравнение, чието решение определяме от Таблица №3:

ДМ :  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\sin x = \cos 2x \stackrel{(\text{табл. №2})}{\Leftrightarrow} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \\ (B) \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Групите ъгли (А) и (В) не са получени от едно и също тригонометрично уравнение, затова трябва да проверим има ли ъгли от едната група, които се съдържат в другата група, а така също трябва да отчетем и ДМ.

Засичането ще разгледаме в общ случай. Нека да имаме следните групи ъгли (за означаване на обобщения ъгъл сме използвали различен параметър):

$$(C) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad (D) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}l\pi; \quad (E) \rightarrow x = \frac{1}{4}p\pi; \quad (F) \rightarrow x = \frac{1}{3}q\pi.$$

Разглеждаме групите ъгли (C) и (D) като ги приравним:  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2l\pi}{3} \Leftrightarrow 3 + 12k = 3 + 4l \Leftrightarrow l = 4k$ , т.е.

ъглите от групата (C) се съдържат в групата (D), защото l се получава като умножим k с 4. Затова ъглите от групата (C) са дублиращи и трябва да отпаднат. Този извод може да се направи, и ако групите ъгли (C) и (D) се нанесат на тригонометричната окръжност по следния начин: Задаваме стойности на k и l от 0 до тогава докато точките започват да се повтарят (фиг.5). Виждаме, че ъглите C<sub>0</sub> и D<sub>0</sub> съвпадат. Затова можем да кажем, че ъглите от групата C са дублиращи.

Разглеждаме групите ъгли (A) и (B) като ги приравним:  $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \Leftrightarrow 1 + 4k = -3 + 12l \Leftrightarrow k = 3l - 1$

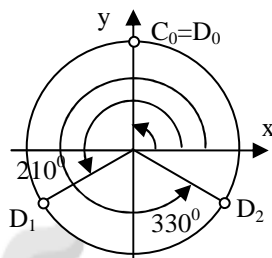
Като отчетем **Бележката от зад.1** следва, че ъглите от групата (B) се съдържат в групата (A), т.е. те са дублиращи и трябва да отпаднат. Същият извод можем да направим, и ако ги нанесем върху тригонометричната окръжност (фиг. 6)

Разглеждаме групите ъгли (E) и (F) като ги приравним:  $\frac{p\pi}{4} = \frac{q\pi}{3} \Leftrightarrow 3p = 4q \Leftrightarrow p = \frac{4q}{3}$ , т.е. излишните

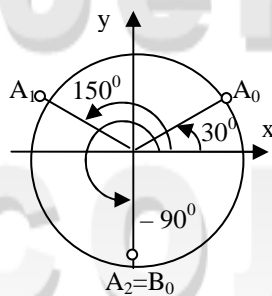
ъгли са от групата (F) и то не всички, а тези които са кратни на 3. Определянето на излишните ъгли (и тези които ще останат) се прави от тригонометричната окръжност (фиг.7). Двете групи съвпадат при ъгли 0 и π. Затова една от групата решения ще бъдат групата E, т.е.  $x = k \frac{\pi}{4}$ .

Останалите отговори:  $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  групираме по следния начин: Отговорите  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$  (както се вижда от фиг.7) се различават с 180°.

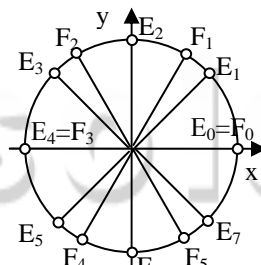
Затова можем да ги запишем по следния начин:  $\frac{\pi}{3} + k\pi$ . По същия начин отговорите  $-\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{2\pi}{3}$  могат да бъдат записани като



Фиг.5



Фиг.6



Фиг.7

$-\frac{\pi}{3} + k\pi$ . Тези два отговора записваме  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ . В крайна сметка след засичането

на групите (E) и (F) получаваме, че решенията са: 
$$\begin{cases} x = k \frac{\pi}{4} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Нека сега да разгледаме групите ъгли (C) и (F) като ги приравним:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{q\pi}{3} \Leftrightarrow 3 + 12k = 2q \Leftrightarrow q = 6k + \frac{3}{2}$$

От тук се вижда, че групите ъгли (C) и (F) се различават с дробно число. В такъв случай дублиращи ъгли няма и двете групи ъгли са решения.

### Бележка:

Да повторим, че групите ъгли не се засичат, когато са получени от едно и също основно тригонометрично уравнение. В случай, когато броят на групите са много и могат да бъдат записани по общ начин (както при фиг. 7), тогава те също се групират (без обаче да изключваме част от тях).

Нека сега се върнем на групите (A) и (B), които са решения на дадената задача 2. От фиг. 6 видяхме, че групите решения (B) са дублиращи. Тогава решенията на уравнението остават да бъдат групата (A). Като отчетем Д.М. виждаме, че ъглите от групата  $(A_2) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  не принадлежат на Д.М. (защото тогава tg не е дефиниран) и

трябва да се изключат от решенията. И, както виждаме от фиг. 6, окончателните решения са групите ъгли:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  (отговарящи на точки (A<sub>0</sub>)) и  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$  (отговарящи на точки (A<sub>1</sub>)).

- ◆ Чрез разлагане на множители – При този метод всички едночлени се прехвърлят от едната страна на равенството и с помощта на формулите от **Тригонометрични формули**, се стремим да достигнем до равенството:  $f(x) g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  или  $g(x) = 0$  (3)  
При този начин за решаване отговорите винаги се засичат по описания по-горе начин.

Зад. 3:  $3\cos^2x + 2\cos^3x = 2\cos x$

**Решение:**  $3\cos^2x + 2\cos^3x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos^2x + 3\cos x - 2) = 0$ . Прилагайки

(3), това уравнение се разделя на следните две:

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) ; E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

1)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2)  $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ . Полагаме:  $\cos x = y$ , ДМ<sub>y</sub>:  $y \in [-1; 1]$ . Уравнението добива вида:  $2y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2 \notin \text{ДМ}_y$  и  $y_2 = \frac{1}{2}$ . От полагането по-

лучаваме  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}; \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (B) \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

Групите ъгли (A) и (B) са решения на уравнението.

◆ Уравнения от вида:  $a \cdot \sin Ax + b \cdot \cos Bx = c$ , (4)  
където  $a^2 + b^2 \neq 0$

- В случаите, когато  $a = b = 1$ , а  $c = 0$ , се решават като преобразуваме едната тригонометрична функция в другата (от таблица №2) и приложим Тригонометрични формули (57) до (60).

Зад. 4:  $\cos 2x + \sin x = 0$

Решение: От Таблица №2 преобразуваме  $\sin x$  в  $\cos$  и след това използваме формула (59):

$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{2x-x+\frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{2x+x-\frac{\pi}{2}}{2} = 0 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{2x+\pi}{4} \cos \frac{6x-\pi}{4} = 0$$

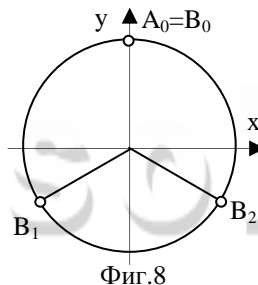
Прилагайки (3), това уравнение се разделя на следните две:

1)  $\cos \frac{2x+\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2)  $\cos \frac{6x-\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (B) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$

Групите ъгли (A) се съдържат в групата ъгли (B), защото:  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}l\pi \cdot \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow 3 + 12k = 3 + 4l \Leftrightarrow l = 3k$ , т.е.

ъглите от групата (A) са дублиращи (този извод можем да го направим и от фиг.8). Затова решенията на нашето уравнение са само групата ъгли (B)  $\rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$



Следващите случаи са когато  $A = B$

- Когато  $a = b$ , а  $c \neq 0$ , тогава повдигаме (2) на квадрат и като приложим Тригонометрични формули (1) и (33) получаваме основно тригонометрично уравнение  $\sin 2x = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$

### Бележка:

Всяко повдигане на квадрат на тригонометрично уравнение довежда до появата на “чужди корени”. Те се отстраняват чрез непосредствена проверка.

Зад. 5:  $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение: Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow (A) \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi; (B) \rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

Непосредствено проверяваме за появата на “чужди” корени по следния начин:

Групите ъгли (A) са  $\frac{7\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}$ . Заместваме в даденото уравнение:

$$\cos \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \text{ е решение}; \quad \cos \frac{19\pi}{12} + \sin \frac{19\pi}{12} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} \text{ не е реше-}$$

ние, т.е. той е “чужд” корен и след отстраняването му групата ъгли (A) има вида

$$(A) \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi. \text{ Тази група е решение на даденото уравнение.}$$

Групите ъгли (B) са  $-\frac{\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}$ . Заместваме в даденото уравнение:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} \text{ е решение}; \quad \cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{11\pi}{12}$$

не е решение, т.е. той е “чужд” корен и след отстраняването му групата ъгли (B) има

$$\text{вида } (B) \rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi. \text{ Тази група е решение на даденото уравнение.}$$

**Бележки:**

1. Задачата може да бъде решена и като се умножат двете страни на даденото уравнение с подходящо число и се приложи Тригонометрични формули (27). Подобен начин за решаване ще покажем в Зад. 7.

2. Задачата може да бъде решена и като използваме формула (76), за да достигнем до основното уравнение  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- Използване на универсалната субституция (виж Тригонометрични формули (9) и (12)). В такъв случай уравнение (2) се преобразува в квадратно спрямо  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

**Бележка:**

Знаем, че тангенсът не е дефиниран за  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , затова в нашия случай след решаването на квадратното уравнение трябва да изключим ъглите  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$

Зад. 6:  $2\sin x + \cos x = -1$

Решение: Като използваме универсалната субституция от Тригонометрични формули (9) и (12) получаваме уравнението

$$2 \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = -1. \text{ ДМ на това}$$

уравнение е:  $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$  и след полагането  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$  получаваме:

$$2 \frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} = -1 \Leftrightarrow 4y + 1 - y^2 = -1 - y^2 \Leftrightarrow 4y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}. \text{ Тогава от полагането}$$

получаваме  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ . От таблица № 2 виждаме, че нямаме изчислен ъгъл, при който тангенсът да бъде равен на  $-\frac{1}{2}$ , но такъв ъгъл съществува. Затова този ъгъл означаваме с  $\alpha$ . От таблица №3 определяме, че решенията на уравнението са

$\frac{x}{2} = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = 2\alpha + 2k\pi$ . В тези решения не се включват групите ъгли  $\pi + 2k\pi$ , но трябва непосредствено да проверим дали тези групи ъгли са решения на даденото уравнение.

$$\text{От } x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \text{ и заместваем в даденото уравнение: } 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$\Leftrightarrow -1 = -1$ , т.е. групата ъгли  $x = \pi + 2k\pi$  са решения на даденото уравнение и затова ги прибавяме към крайните решения. Окончателните решения са:  $x = \pi + 2k\pi$ ,  $x = 2\alpha + 2k\pi$ . Ъгълът  $\alpha$  определяме от таблица (или калкулатор) и има приблизителна стойност  $27^\circ$ .

- Чрез въвеждане на спомагателен ъгъл – В някои случаи лявата страна на уравнението (4) е полезно да се замени с израза  $\sin(x \pm \varphi)$ .

Преобразуването става като разделим двете страни на уравнение (4) с  $\sqrt{a^2 + b^2}$  и получаваме:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin Ax + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos Ax = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Въвеждаме  $\varphi$  с равенствата:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$  и  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$  (такива полагания могат да се направят,

защото  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ ). Така за горното уравнение получаваме:

$\cos \varphi \sin Ax + \sin \varphi \cos Ax = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Прилагаме Тригонометрични формули (27) и получаваме исканото основно тригонометрично уравнение  $\sin(Ax + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Това

уравнение (или уравнение (4)) има решение, ако  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . (5)

Зад. 7:  $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -\sqrt{3}$

Решение: Сравнявайки това уравнение с уравнение (4) стигаме до извода, че

$A = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = -\sqrt{3}$  и  $c = -\sqrt{3}$ . Тогава  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$  т.е. делим даденото уравнение с 2 и получаваме:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \pi + k\pi \end{cases}$$

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

- От тъждеството  $(a \cdot \sin Ax + b \cdot \cos Ax)^2 + (b \cdot \sin Ax - a \cdot \cos Ax)^2 = a^2 + b^2$  намираме  $(b \cdot \sin Ax - a \cdot \cos Ax)^2 = a^2 + b^2 - c^2$ . Тогава от системата

$$\begin{cases} a \sin Ax + b \cos Ax = c \\ b \sin Ax - a \cos Ax = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \end{cases} \text{ получаваме основните тригонометрични уравнения:}$$

$$\sin Ax = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \text{ и } \cos Ax = \frac{bc \mp a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \quad (6)$$

- ◆ Хомогенни тригонометрични уравнения – Те са от вида:

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0 \quad (7)$$

Хомогенните уравнения нямат решение при  $\cos x = 0$ , защото тогава от горното уравнение следва, че и  $\sin x = 0$ . Обаче от Тригонометрични формули (1) знаем, че не съществува  $x$ , за което двете функции едновременно да са 0. Затова уравнение (7) можем да го разделим на  $\sin^n x$  или  $\cos^n x$ . Тогава хомогенното уравнение се превръща в:  $a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0$ . Сега полагаме  $\operatorname{tg} x = y$  и уравнението се превръща в квадратно алгебрично, което решаваме.

Зад. 8:  $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$  (ПУ, 1996)

Решение: Допускаме, че  $\cos x = 0$ , от Тригонометрични формули (1) получаваме  $\sin^2 x = 1$ . Като заместим в даденото уравнение, получаваме  $1 = 0$  т.е. при това допускане уравнението не се удовлетворява. Затова делим на  $\cos^2 x \neq 0$  и получаваме:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (\sqrt{3} + 1) \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0; \text{ Полагаме : } \operatorname{tg} x = y; \text{ ДМ : } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y^2 - (\sqrt{3} + 1)y + \sqrt{3} = 0; D = (\sqrt{3} + 1)^2 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2 \rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3} - 1$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{3}; y_2 = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}{2} = 1$$

От полагането имаме следните случаи

1)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \in \text{ДМ.}$

2)  $\operatorname{tg} x = 1; \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (B) \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \in \text{ДМ.}$

Окончателните отговори са групата ъгли (А) и (В).

Някои уравнения не са от вида (7), но могат да се преобразуват с помощта на Тригонометрични формули. Например: Уравнението:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x + d = 0, \text{ където } a + d \neq 0 \quad (8)$$

се свежда до квадратно за  $\operatorname{tg} x$ , когато  $d$  представим като  $1 \cdot d$  и приложим Тригонометрични формули (1). Друг начин за преобразуване на тригонометрично уравнение в хомогенно е използването на подходящи Тригонометрични формули:

### Бележка:

Уравнение (8) може да се преобразува до квадратно за  $\operatorname{tg} x$  с помощта на Тригонометрични формули (18) и (20) или до квадратно спрямо четвърта степен за  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  с универсалната субституция (9) и (12). В случаите, когато

формулите (18) и (20) свеждат уравнението до рационално за  $\operatorname{tg} x$  (тогава наред с тях се използват и формулите (8) и (11)), тяхното използване трябва да се предпочита пред това на формулите (9) и (12).

Зад. 9:  $3 \cos^3 x - \sin^2 x \cos x = \sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$

Решение: Разкриваме скобите и прехвърляме всички едночлени отляво:

$3 \cos^3 x - \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot \cos x - \sin^3 x = 0$ . Това уравнение е хомогенно, затова допускаме, че  $\cos x = 0$ , от Тригонометрични формули (1) получаваме  $\sin^2 x = 1$ .

Като заместим в даденото уравнение, получаваме  $-1 = 0$ , т.е. при това допускане уравнението не се удовлетворява. Затова делим на  $\cos^3 x \neq 0$ , и като заместим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ получаваме: } \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0. \text{ ДМ : } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Полагаме: } \operatorname{tg} x = y$$

и получаваме  $y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 1 + y^2 - 1 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 - y + 1) + (y - 1)(y + 1) + (y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 1 + y + 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + 2y + 3) = 0$ . Разглеждаме следните два случая:

1)  $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \in \text{ДМ.}$

2)  $y^2 + 2y + 3 = 0; D = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \text{H.P.}$

Окончателните решения на даденото уравнение са групите (А).

### Бележка:

Полученото в горната задача уравнение от трета степен  $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$  може да се реши с правилото на Хорнер.

- ◆ Уравнения за които използваме, че неравенствата  $-1 \leq \sin x \leq 1$  и  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , са верни за всяко  $x$ .

Зад. 9:  $\sin x + \sin 9x = 2$

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

**Решение:** За да е в сила горното уравнение, трябва да е изпълнена системата:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ (B) \rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}l\pi \end{cases} . \text{ Засичаме отговорите и решение на да-}$$

дената задача ще бъдат само дублиращите групи ъгли:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{18} + \frac{2l\pi}{9} \Leftrightarrow 9 + 36k = 1 + 4l \Leftrightarrow l = 2 + 9k, \text{ т.е. ъглите от групата (A) се съдър-}$$

жат в групата (B) и те са дублиращи. Затова окончателното решение на даденото

уравнение са  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Зад. 10:  $\cos x \cdot \cos 7x = 1$

**Решение:** Разглеждаме следните два случая:

$$1) \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 7x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 7x = 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A) \rightarrow x = 2k\pi \\ (B) \rightarrow x = \frac{2}{7}l\pi \end{cases}; 2k\pi = \frac{2l\pi}{7} \Leftrightarrow l = 7k \text{ т.е. ъглите (A) са дублиращи}$$

Общото решение в този случай е  $x = 2k\pi$

$$2) \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 7x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ 7x = \pi + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A) \rightarrow x = \pi + 2k\pi \\ (B) \rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}l\pi \end{cases}; \pi + 2k\pi = \frac{\pi}{7} + \frac{2l\pi}{7} \Leftrightarrow l = 3 + 7k \text{ т.е.}$$

ъглите от групата (A) се съдържат в ъглите от групата (B) и те са дублиращи. Общо-  
то решение в този случай е  $x = \pi + 2k\pi$

Нанасяйки решенията (1) и (2) на тригонометричната окръжност, виждаме, че се различават с  $180^\circ$ . Затова можем да ги обединим (не да ги засечем) в група ъгли  $x = k\pi$ , което е и решение на дадената задача.

- ◆ Уравнения, в които участват само изразите  $\sin x + \cos x$  и  $\sin x \cdot \cos x$  или  $\sin x - \cos x$  и  $\sin x \cdot \cos x$ .

За  $\sin x + \cos x$  (или  $\sin x - \cos x$ ) използваме Тригонометрични формули (76) и правим полагането  $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  (или

$$y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \text{ От тук се вижда, че } ДМ_y: y \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \text{ (защото } -1 \leq$$

$\sin x \leq 1$ ). Израза  $\sin x \cdot \cos x$  получаваме като повдигнем полагането на квадрат, т.е.

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = y^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Зад. 11:  $\sin x + \cos x = \sin x \cos x - 1$

**Решение:** Полагаме  $\sin x + \cos x = y$ . Повдигаме двете страни на квадрат и след преобразуване получаваме  $\sin x \cdot \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$ . От Тр. Ф. (76) полагането се за-

писва във вида  $y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ ;  $ДМ_y: y \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ , и даденото уравнение добива

вида  $y = \frac{y^2 - 1}{2} - 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$ ;  $y_1 = 3 \notin ДМ_y, y_2 = -1 \in ДМ_y$ . От полагането получа-

ваме  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow (A) \rightarrow x = \pi + 2k\pi; \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$(B) \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Групите ъгли (A) и (B) са окончателните решения на даденото уравнение.

**Следват избрани задачи от**

**Основни типове задачи:**

Зад. 12:  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x}$

**Решение:** Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} \Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x +$$

$$2\sin x \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x (1 + 2\sin x \cos x) = 1 \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow (2\sin x \cos x)^2 (1 + 2\sin x \cos x) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 2x (1 + \sin 2x) = 2. \text{ Полагаме } \sin 2x = y, ДМ_y: y \in [-1; 1]$$

и получаваме  $y^2(1 + y) = 2 \Leftrightarrow y^3 + y^2 - 2 = 0$ . Това уравнение от трета степен решаваме с помощта на правилото на Хорнер. Делителите на свободния член са  $\pm 1$ ;

$\pm 2$ . По правилото на Хорнер намираме кой от тях може да бъде решение на даденото уравнение

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

Щом  $r = 0$  числото  $x = 1$  е точен корен. Следващите делители не ги проверяваме, а записваме дадения многоч-

лен като произведение от двучлен и квадратна функция:  $(y - 1)(y + 2y + 2) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$  или  $y^2 + 2y + 2 = 0, D = 1 - 2 < 0$

$\Rightarrow$  Н.Р. т.е. решението е само  $y = 1$ . От полагането получаваме

## Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ . Повдигането на квадрат довежда по появата на “чужди корени”, затова ще направим проверка. От тригонометричната окръжност виждаме, че получената група ъгли може да разделим на две групи:

(A)  $\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  и (B)  $\rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ . Непосредствено се проверява, че само групата

(A) удовлетворява даденото уравнение (защото за група (B) от таблица №2 се вижда, че  $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Замествайки в даденото уравнение, получаваме:

$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ , което очевидно не е вярно, т.е. група (B) не са решения на даденото уравнение). Окончателните решения на даденото уравнение са само група (A)  $\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Зад. 13:  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

**Решение:** За понижаване на степента използваме Тригонометрични формули (19) и получаваме:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x + 1 + \cos 6x = 2 \Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 6x) + 2\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (A) \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$$

$$2) \cos 4x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (B) \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}k\pi \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow (C) \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Като приравним групите ъгли (C) и (B) виждаме, че (C) е дублираща група и тя отпада като решения. Окончателните решения са:  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$  и  $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$ .

### Бележка:

Когато тригонометричните функции участват в уравнението чрез четни степени, полезно е да се използват Тригонометрични формули за понижаване на степените (17) и (19).

Зад. 18: При кои стойности на реалния параметър **a**, уравнението  $(1 - a)\cos 2x + 2(1 - 2a)\sin x + a + 3 = 0$  има решение.

**Решение:** Използваме Тригонометрични формули (34):

$$(1 - a)(1 - 2\sin^2 x) + 2(1 - 2a)\sin x + a + 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - a + 2a\sin^2 x + 2(1 - 2a)\sin x + a + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(a - 1)\sin^2 x + 2(1 - 2a)\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)\sin^2 x + (1 - 2a)\sin x + 2 = 0$$

Разглеждаме два случая:

1) При  $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ , горното уравнение се превръща в линейното уравнение  $\sin x = 2$ , което няма решение т.е.  $a = 1$  не е решение на даденото уравнение;

2) При  $a - 1 \neq 0$  в горното уравнение полагаме  $\sin x = y$ :

$$(a - 1)y^2 + (1 - 2a)y + 2 = 0; D = (1 - 2a)^2 - 8(a - 1) = 1 - 4a + 4a^2 - 8a + 8 = 9 - 12a + 4a^2 = (2a - 3)^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{(2a - 3)^2} = 2a - 3; y_1 = \frac{2a - 1 - 2a + 3}{2(a - 1)} = \frac{2}{2(a - 1)} \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{a - 1}; y_2 = \frac{2a - 1 + 2a - 3}{2(a - 1)} \Leftrightarrow y_2 = 2$$

2.a)  $\sin x = 2$ . Това уравнение няма решение;

2.б)  $\sin x = \frac{1}{a - 1}$ . Това уравнение има решение, когато е изпълнено:

$$\begin{cases} \frac{1}{a - 1} \geq -1 \\ \frac{1}{a - 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a - 1} + 1 \geq 0 \\ \frac{1}{a - 1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a - 1} \geq 0 \\ \frac{2 - a}{a - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty) \\ a \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

От 1) и 2) следва, че даденото уравнение има решение при  $a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

## VIII. Тригонометрични неравенства

Решаването на тригонометрични неравенства обикновено се свежда до решаване на основни тригонометрични неравенства. Те са представени в таблицата:

Таблица № 4

Неравенство:	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$ т.е. $ a  < 1$	$a = 1$	$a > 1$
$\sin x > a$ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\forall x$	$\forall x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$ (Фиг. 9)	н.р.	н.р.
$\sin x < a$ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	н.р.	н.р.	$-\pi - \alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ (Фиг. 10)	$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\forall x$
$\cos x > a$ $\alpha \in [0; \pi]$	$\forall x$	$\forall x \neq \pi + 2k\pi$	$-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ (Фиг. 11)	н.р.	н.р.

# Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

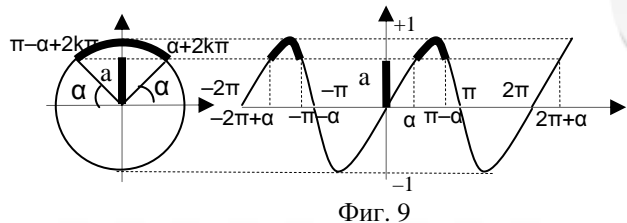
$\cos x < a$ $a \in [0; \pi]$	н.р.	н.р.	$\alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi$ (Фиг. 12)	$\forall x \neq 2k\pi$	$\forall x$
----------------------------------	------	------	---	------------------------	-------------

### Бележка:

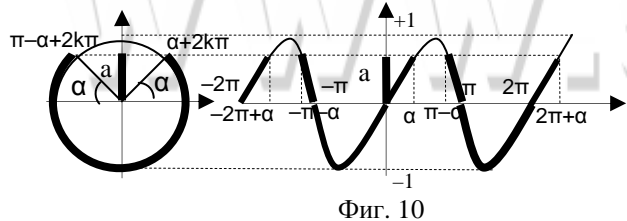
Ако имаме нестрого неравенство (например:  $\sin x \geq a$ ) и  $a = 1$  (или  $a = -1$ ), то след като неравенствата  $\sin x > a$  (или  $\cos x > a$ ) нямат решения, то остава да търсим решение само за  $\sin x = a = 1$ .

Таблица № 5

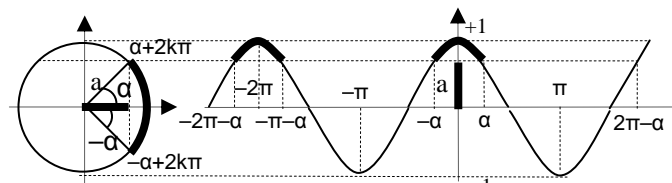
Неравенство:	$-\infty < a < +\infty$	Неравенство:	$-\infty < a < +\infty$
$\operatorname{tg} x > a$ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (Фиг. 13)	$\operatorname{tg} x < a$ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi$ (Фиг. 14)
$\operatorname{cotg} x > a$ $\alpha \in (0; \pi)$	$k\pi < x < \alpha + k\pi$ (Фиг. 15)	$\operatorname{cotg} x < a$ $\alpha \in (0; \pi)$	$\alpha + k\pi < x < \pi + k\pi$ (Фиг. 16)



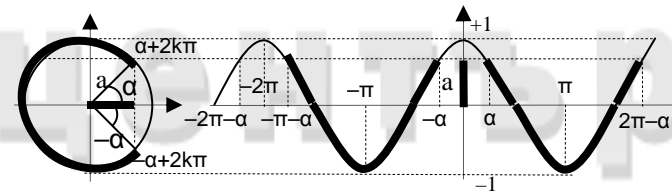
Фиг. 9



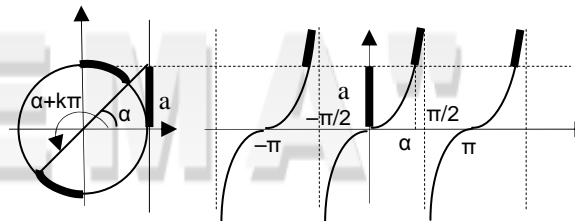
Фиг. 10



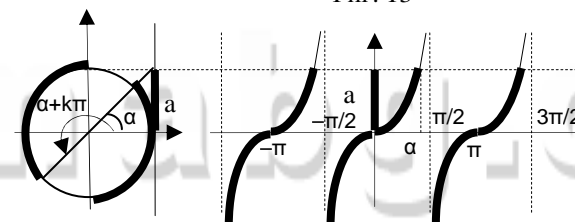
Фиг. 11



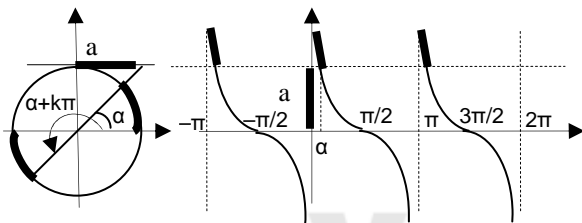
Фиг. 12



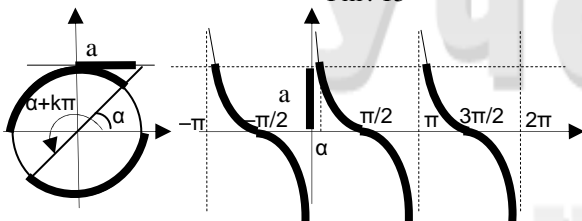
Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16

Зад. 20:  $\sin x < \cos x$

Решение: Преобразуваме до основно тригонометрично неравенство:

$$\sin x - \cos x < 0 \mid \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \alpha = 0$$

$$-\pi - 0 + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} > -\pi + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} < 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Зад. 21:  $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 > 0$

Решение: От таблица №2 имаме  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  и неравен-

ството има вида:

$$2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 > 0; \text{Полагаме: } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = y; \text{ ДМ, } y \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 > 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

$$1) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}; \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$$

$$2) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1; x \in \emptyset$$

От 1) и 2) следва, че решенията са  $\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$ .

## IX. Тригонометрични преобразования

Зад. 23: Намерете  $\text{tg } 75^\circ$ .

Решение: Аргумента на дадената тригонометрична функция представяме така, че да може да използваме Таблица за стойностите на тригонометричните функции:

$$\begin{aligned} \text{tg } 75^\circ &= \text{tg}(30^\circ + 45^\circ) \stackrel{\text{т.ф. (4.5)}}{=} \frac{\text{tg}30^\circ + \text{tg}45^\circ}{1 - \text{tg}30^\circ \cdot \text{tg}45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \\ &= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Зад. 24: Намерете стойността на всички тригонометрични функции, ако  $\text{tg}\alpha = \frac{2}{5}$  и  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ .

Решение: Синус и косинус намираме от системата  $\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5} & (1) \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & (2) \end{cases}$ . Решаваме я

чрез заместване:

- от (1) получаваме  $\sin \alpha = \frac{12}{5} \cos \alpha$ .

## Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com); E-mail: [solema@gbg.bg](mailto:solema@gbg.bg)

- заместваме в (2)  $\left(\frac{12}{5}\right)^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{169}{25} \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{13}$ , но по условие  $\alpha$  е в I квадрант, то знакът на  $\cos \alpha$  е положителен, затова  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ .

- Заместваме в  $\sin \alpha = \frac{12}{5} \cos \alpha$  и получаваме  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$   
Остава да намерим котангенс от формулата  $\cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \Leftrightarrow \cot g \alpha = \frac{5}{12}$

Зад. 25: Пресметнете  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ ;  $\cot g \frac{\pi}{8}$ .

Решение: За да използваме формулите за половинки ъгли (виж ТФ. 5.13 до 5.16)

трябва да представим  $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$  и тогава:

- $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ ;
- $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ ;
- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ ;
- $\cot g \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$ .

Зад. 25: Намерете  $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ , ако  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  и  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ .

Решение: Използваме (ТФ.4.5), която за нашия случай е

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$
 Остава да намерим  $\operatorname{tg} \alpha$ .

- От основното тригонометрично тъждество намираме  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$ , но по условие  $\alpha$  е във II квадрант, то знакът на  $\sin \alpha$  е отрицателен, откъдето  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ .

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

- $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = -\frac{3}{7}$

### Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА“.

Учебен център „СОЛЕМА“ подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж [www.solemabg.com](http://www.solemabg.com) раздел „За нас“.