

СПРАВОЧНИК ПО ГЕОМЕТРИЯ

"СОЛЕМА"

от Сашо Стаhev

www.solemabg.com

Триъгълници

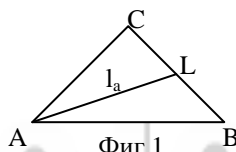
I. Свойства на елементите в триъгълник:

- 1) Височините на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича ортоцентър.
- 2) Медианите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича медицентър. Тя разделя медианата в отношение 2:1, считано от върха на триъгълника.
- 3) Ъглополовящите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на вписаната в триъгълника окръжност.
- 4) Симетралите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на описаната около триъгълника окръжност.

Бележка:

И четирите забележителни точки, при остроъгълен триъгълник са вътрешни.

- 5) Ако $\gamma=90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$ (Питагоровата теорема).
- 6) Ако $\gamma>90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2<c^2$.
- 7) Ако $\gamma<90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2>c^2$.
- 8) Формула на Стюарт – За всяка точка L (Фиг. 1) от страната BC на триъгълник е в сила следната формула $AL^2 = \frac{mb^2+nc^2}{a^2} - mn$, където $BL = m$, $CL = n$.



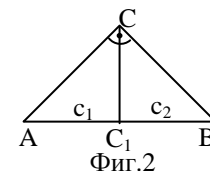
- 9) Формули за ъглополовящата: $l_a^2 = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$
(подобни формули може да се напишат и за ъглополовящите към другите страни).

10) I свойство на ъглополовящата (Фиг.1): Ако $\sphericalangle LAB = \sphericalangle LAC \Leftrightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$ (това свойство важи, както за вътрешна, така и за външна ъглополовяща на даден ъгъл).

- 11) II свойство на ъглополовящата (Фиг.1): $l_a^2 = AC \cdot AB - BL \cdot CL$.
- 12) III свойство на ъглополовящите: $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$; $l_b = \frac{2ca}{c+a} \cos \frac{\beta}{2}$; $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}$.
- 13) Формули за медианите: $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$ (подобни формули може да се напишат и за медианите към другите страни).

- 14) Формули за връзка между страна и медиани: $9a^2 = 4(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$ (подобни формули може да се напишат и за медианите към другите страни).
- 15) Средна отсечка: Ако M е среда на AC, а N среда на BC, то средната отсечка MN в $\triangle ABC$ притежава следните свойства: $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2} AB$.

II. Правоъгълен триъгълник с $\sphericalangle C=90^\circ$ (фиг.2):



- 16) Ако $\sphericalangle A=30^\circ$, то $a = \frac{1}{2} c$.
- 17) Ако CC_1 медиана, то $CC_1 = \frac{1}{2} c$.
- 18) Ако $CC_1 = h_c$ е височина, а $AC_1 = c_1$ и $BC_1 = c_2$ са проекциите съответно на катетите a и b върху хипотенузата, то $a^2 = c \cdot c_2$; $b^2 = c \cdot c_1$ $h_c^2 = c_1 \cdot c_2$ $h_c \cdot c = a \cdot b$ $c = 2R$
- 19) Тригонометрични функции: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$; $\cot \alpha = \frac{b}{a}$.
- 20) Косинусова теорема: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \beta$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma$.
- 21) Синусова теорема: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.
- 22) Тангенсова теорема: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$.
- 23) Теорема за проекциите: $a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$; $b = c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma$; $c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$.

- 24) Молвейдови формули: $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$; $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$

III. Лице на триъгълник:

- 25) $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta$.
- 26) $S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$.
- 27) $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \frac{abc}{4R}$, където $p = \frac{a+b+c}{2}$ е полупериметъра, r – радиуса на вписаната окръжност, r_a, r_b, r_c – радиусите на външно вписаните окръжности; R – радиуса на описаната окръжност.

Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com; E-mail: solema@gbg.bg

28) Херонова формула: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където p е полупериметъра.

29) Лице на равностранен триъгълник: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, защото $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

30) Ако един триъгълник е разделен на няколко триъгълници, лицето му е равно на сбора от лицата на тези триъгълници.

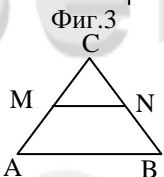
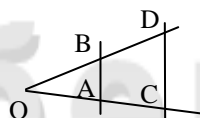
31) Ако вписаната в произволен $\triangle ABC$ окръжност допира страната му AB в точка K , като $AK=x$ и $BK=y$ (Фиг. 6), то $S = x \cdot y \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$.

IV. Подобни триъгълници:

32) Теорема на Галес (Фиг. 3): Ако две пресичащи се прави (OC и OD) се пресичат от няколко успоредни прави (AB , CD), то отсечките от едната права са пропорционални на съответните отсечки от другата права, т.е. Ако $AB \parallel CD$, то

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

Следствие: Всяка права, успоредна на една от страните в даден триъгълник отсича от другите две страни пропорционални отсечки т.е. Ако $MN \parallel AB$, то $\frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} = \frac{MA}{NB}$ (Фиг. 4).

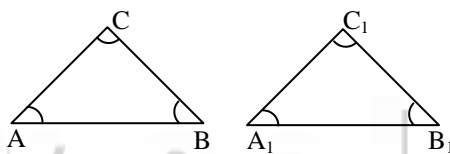


33) Обратна теорема на Галес (Фиг. 3): Ако $\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$, то $AB \parallel CD$.

Следствие: Ако $\frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} = \frac{MA}{NB}$, то $MN \parallel AB$. (Фиг. 4).

34) Подобни триъгълници:

Определение: Ако $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, където k е коефициент на подобие (Фиг. 5)



Признаци за подобие на триъгълници:

Два триъгълника са подобни т.е. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), ако:

I признак: Два ъгъла от единия са съответно равни на два ъгъла от другия, т.е.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \text{ и } \sphericalangle B = \sphericalangle B_1;$$

II признак: Две страни от единия са съответно пропорционални на две страни от дру-

гия и ъглите, заключени между тях са равни, т.е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$;

III признак: Страните на единия са съответно пропорционални на другия, т.е.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

IV признак: Два правоъгълни триъгълника са подобни, ако катет и хипотенуза от един триъгълник са съответно пропорционални на катет и хипотенуза от друг триъгълник, т.е. $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} \Leftrightarrow \triangle \sim \triangle_1$

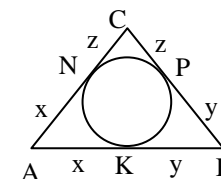
Свойства на подобни триъгълници:

35) Ако $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{m_c}{m_{c_1}} = \frac{l_c}{l_{c_1}} = \frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{P}{P_1}$.

36) Ако $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), то $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}$.

V. Триъгълник вписан в окръжност или описан около окръжност:

37) Нека произволен $\triangle ABC$ има страни $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$, и вписаната в него окръжност допира тези страни съответно в точките K , P , N (Фиг. 6). Ако означим: $AK=AN=x$, $BK=BP=y$, $CP=CN=z$ и p – полупериметъра на $\triangle ABC$, то $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$.



37.1) Ако окръжност е вписана в равностранен триъгълник (Фиг. 6), то допирните му точки (т.К, т.Р и т. N) са среди на съответните страни (AB , BC и AC).

38) От (37) за радиуса на вписаната в правоъгълен триъгълник ($\sphericalangle C=90^\circ$) окръжност, имаме $a+b=c+2r$ или $r=p-c$.

39) Права на Ойлер: За всеки произволен триъгълник, ортоцентърът H , медицентърът M и центърът O на описаната окръжност (пресечната точка на симетралите на страните) лежат на една права, като $HM = 2MO$.

40) Формула на Ойлер (за намиране на разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник): Ако с d отбележим разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник, с R – радиуса на описаната окръжност, а с r – радиуса на вписаната окръжност, то $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} \geq 0$

Бележка:

За всеки триъгълник диаметъра на вписаната окръжност е по-малък или равен на радиуса на описаната окръжност. Затова във формулата на Ойлер равенството се получава при равностранен триъгълник (защото тогава центровете на описаната и вписаната окръжност съвпадат).

41) Връзка между радиуса на вписаната в триъгълник окръжност и трите му височини: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

42) За произволен триъгълник:

$$r = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \text{ За равнобедрен триъгълник:}$$

$$r = 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = 2R(1 - \cos \alpha) \cos \alpha$$

43) За произволен триъгълник: $p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$. За равнобедрен триъ-

гълник: $p = 4R \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = 2R(1 + \cos \alpha) \sin \alpha$.

44) Теорема на Лайбниц: Нека с М отбележим медицентъра на ΔABC и ако точка Р е произволно избрана в пространството, то имаме изпълнени следните равенства: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2$ или

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 3PM^2.$$

Следствие 1: Сборът от квадратите на разстоянията на произволна точка от равнината на един триъгълник до трите върха на този триъгълник има най-малка стойност, когато тази точка съвпада с медицентъра.

Следствие 2: Местоположението на точките в равнината на триъгълник, за който сборът от квадратите на разстоянията до трите върха на триъгълника е постоянен, е окръжност с център медицентърът на триъгълника.

Бележка:

Навсякъде в горните формули се използват следните означения: $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, m_a , m_b , m_c – медиани към съответните страни; l_a , l_b , l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a , h_b , h_c – височини към съответните страни; r – радиуса на вписаната в триъгълник окръжност; R – радиус на описаната около триъгълник окръжност; $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$.

Четириъгълници

I. Произволен четириъгълник:

45) Един четириъгълник е вписан в окръжност, когато сборът на два негови срещуположни ъгъла е равен на 180° .

46) Центърът на описаната около четириъгълник окръжност лежи на пресечната точка на симетралите му.

Бележка:

Произволен успоредник не може да се впише в окръжност.

47) Един четириъгълник е описан около окръжност, когато сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора от другите му две страни;

48) Центърът на вписаната в четириъгълник окръжност, лежи на пресечната точка на ъглополовящите на ъглите му.

Бележка:

Произволен успоредник не може да се опише около окръжност.

49) Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, където O е пресечната точка на диагоналите му;

50) Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, където M е пресечната точка на продълженията на срещуположните му страни AB и CD ;

51) За всеки четириъгълник $ABCD$ (където $AB=a$, $CD=b$, $AD=c$, $BC=d$ са страните, а $AC=d_1$, $BD=d_2$ – диагоналите му) е изпълнено следното неравенство: $ac+bd \geq d_1 d_2$, като равенството се изпълнява тогава и само тогава, когато четириъгълникът е вписан в окръжност.

Първа теорема на Птоломей: Произведението от диагоналите на всеки вписан четириъгълник е равно на сбора от произведенията на срещуположните страни т.е. $d_1 d_2 = ac + bd$.

Втора теорема на Птоломей: Диагоналите във всеки вписан четириъгълник се отнасят помежду си както сборовете от произведенията на страните, пресичащи се в краищата на съответния диагонал т.е. $\frac{d_1}{d_2} = \frac{ab + cd}{bc + ad}$.

52) Нека точките С и D лежат в една и съща полуравнина относно правата АВ и “виждат” отсечката АВ под един и същи ъгъл. Тогава точките А, В, С и D лежат на една окръжност;

53) При последователно съединяване средите на страните на произволен четириъгълник се получава успоредник.

54) Във всеки четириъгълник отсечките, които съединяват средите на две срещуположни страни, и отсечката, която съединява средите на диагоналите, се пресичат в една точка, която разполюва всяка от тях.

55) За всеки четириъгълник ABCD (където $AB=a, CD=b, AD=c, BC=d, AC=d_1, BD=d_2, \angle AOB=\varphi$, където О е пресечната точка между диагоналите му), диагоналите му са взаимно перпендикулярни тогава и само тогава, когато сборът от квадратите на всеки две негови срещуположни страни е равен на сбора от квадратите на другите две срещуположни страни т.е. $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)=2d_1 d_2 \cos \varphi$.

II. Лице на произволен четириъгълник:

56) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}$, където p е полупериметъра на четириъгълника, а φ – ъгълът между диагоналите.

57) Описан четириъгълник: $S = pr = \sqrt{abcd} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

58) Вписан четириъгълник: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$;

59) Четириъгълник едновременно вписан и описан за окръжност: $S = \sqrt{abcd}$;

III. Успоредник:

60) Сборът от квадратите на страните на всеки успоредник е равен на полусбора от квадратите на диагоналите му т.е. $2(a^2+b^2)=d_1^2+d_2^2$;

61) Ако α е остър ъгъл от успоредник, а d_1 и d_2 са диагоналите му, то $\cos \alpha = \frac{|d_1^2 - d_2^2|}{4ab}$;

62) Ако φ е остър ъгъл между диагоналите на успоредник, то $\cos \varphi = \frac{|a^2 - b^2|}{d_1 \cdot d_2}$;

63) Лице на успоредник: $S = ah_a = bh_b = ab \sin \alpha = \frac{1}{4}(d_1^2 - d_2^2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$,

където d_1 е по-големия диагонал, а φ е остър ъгъл между диагоналите му.

Следствие: От всички успоредници с едни и същи страни a и b най-голямо лице има правоъгълникът (защото $\alpha=90^\circ$).

Бележки:

1. Успоредникът е вид четириъгълник, затова всички твърдения изказани по-горе за четириъгълник важат и за успоредник.
2. В успоредникът не може да се впише и опише окръжност (виж (45) и (46)).

64) Видове успоредници:

64.1) Ромб:

64.1.a) Диагоналите му са перпендикулярни и ъглополовящи на прилежащите му ъгли, затова центъра на вписаната окръжност съвпада с пресечната им точка т.е. $h_a = h_b = 2r$. За тях важат следните равенства: $d_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}; d_2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$;

64.1.b) За всеки ромб е в сила равенството: $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ (виж (60));

64.1.c) Лице: $S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$ (виж (63));

64.1.d) Не може да се опише окръжност (виж (45));

64.2) Правоъгълник:

64.2.a) За диагоналите му е в сила $d_1 = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (виж (60));

64.2.b) Не може да се впише окръжност (виж (47)), а радиуса на описаната окръжност е равна на половината от диагонала;

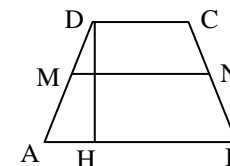
64.2.c) $S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$

IV. Трапец:

65) Средна отсечка – Нека точките М и N са среди съответно на бедрата AD и BC на трапеца ABCD (Фиг. 7), то средната отсечка MN притежава следните свойства:

$MN \parallel AB \parallel CD$ и $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

66) Нека за равнобедрен трапец ABCD (фиг. 7) имаме означенията $AB = a, CD = b, DH$ – височина, тогава



Фиг.7

$$AH = \frac{a-b}{2}; BH = \frac{a+b}{2}.$$

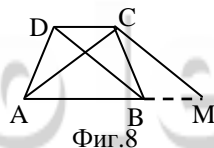
67) За сбора от квадратите на диагоналите за всеки трапец е изпълнено: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$, а за разликата им $d_1^2 - d_2^2 = \frac{a+b}{a-b}(d^2 - c^2)$, където a и b са основи, c и d – бедра, d_1 и d_2 – диагонали на трапеца

Бележка:

За равнобедрен трапец имаме $d_1=d_2$, $d=c$ и първата формула (виж (67)) добива вида $d_1^2=c^2+ab$

68) Ако един трапец е вписан в окръжност, то той е равнобедрен т.е. около всеки равнобедрен трапец може да се опише окръжност;
 69) Центъра на описаната около трапец окръжност лежи на пресечната точка на симетралите (симетралите на голямата и малка основа съвпадат).
 70) Центъра на вписаната в трапец окръжност лежи на пресечната точка на ъглополовящите му, като ъгълът между ъглополовящите на два прилежащи ъгъла е равен на 90° ;
 70.1) При произволен трапец центърът на вписаната окръжност лежи на средната му отсечка (виж: Многоъгълник, Зад. 27);
 70.2) При равнобедрен трапец центърът на вписаната окръжност разполага средната отсечка;
 70.3) При равнобедрен трапец симетралите на голямата и малката основа съвпадат, като центърът на вписаната в трапеца окръжност лежи върху нея (виж СУ, 1996 – I изпит);

71) Ако през точка C построим отсечка CM успоредна на диагонала BD (Фиг. 8), то $\triangle ACM$ и трапеца $ABCD$ са равноличеви т.е. $S_{\triangle ACM} = S_{ABCD}$. Ако през точка D построим отсечка DM успоредна на бедрото BC , то получаваме



Фиг.8

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{a-b} S_{\triangle ADM};$$

72) Радиус на вписана в равнобедрен трапец окръжност $- 4r^2=ab$;

73) Ако имаме трапеца $ABCD$, то лицето му е $S = \frac{a+b}{2}h = MN h = (a+b)r$,

защото $h=2r$. Ако трапеца е равнобедрен, то $S=2cr$;

74) Теорема на Щайнер – Във всеки трапец средите на основите, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продължението на бедрата лежат на една права – права на Щайнер.

74.1) Обратна теорема на Щайнер – За всеки четириъгълник, ако среда на основата, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продължението на бедрата лежат на една права, то четириъгълника е трапец.

Ъгли. Окръжност и кръг

I Ъгли с взаимно успоредни или взаимно перпендикулярни рамене

75) Ако два ъгъла са с взаимно успоредни рамене и

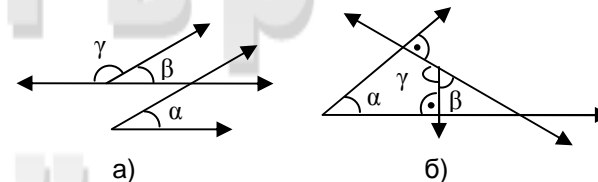
75.1) са от един и същи вид, те са равни, т.е. $\alpha=\beta$ (Фиг. 9 а).

75.2) не са от един и същи вид, то сборът им е равен на 180° , т.е. $\alpha+\gamma=180^\circ$ (Фиг.9 а).

76) Ако два ъгъла са с взаимно перпендикулярни рамене и

76.1) са от един и същи вид, те са равни, т.е. $\alpha=\beta$ (Фиг. 9 б).

76.2) не са от един и същи вид, то сборът им е равен на 180° , т.е. $\alpha+\gamma=180^\circ$ на Фиг.9 б).



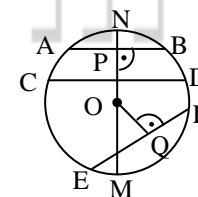
Фиг. 9

II. Взаимно положение на права и окръжност:

Определения:

1. Хорда: Права която свързва две произволни точки от окръжността.
2. Секателна: Права която има две общи точки с окръжността.
3. Допирателна: Права която има една обща точка с окръжността.

77) Ако диаметър е перпендикулярен на хорда в окръжност, то той разполюва хордата и съответната и дъга т.е. Ако $MN \perp AB \Leftrightarrow AP=BP; \widehat{AN}=\widehat{BN}$ и $\widehat{AM}=\widehat{BM}$ (Фиг. 10);



Фиг.10

Следствие:

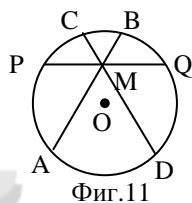
Ако една права минава през средата на хорда и съответната и дъга, то тя минава и през центъра на окръжността и е перпендикулярна на хордата.

78) Ако $AB \parallel CD \Leftrightarrow AC=BD$ и $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ (Фиг. 10);

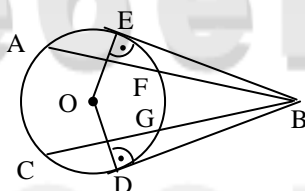
79) Ако $AB=EF \Leftrightarrow OP=OQ$ и $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ (Фиг. 10);

80) Нека AB, CD, PQ са хорди, които се пресичат в точка M (Фиг. 10) и нека PQ е перпендикулярна на диаметъра, то $AM \cdot MB = CM \cdot DM = PM^2 = QM^2$;

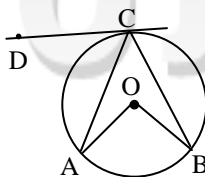
81) Ако точка B (Фиг. 12) е външна за окръжността, правите AB и CB са секущи и EB допирателна, то $FB \cdot AB = GB \cdot CB = EB^2$;



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

Бележка:

Обратните теореми на твърдения (виж (79) и (80)) ни дават достатъчните условия четири (или три) точки да лежат на една окръжност.

82) Ако права е допирателна до окръжност, то тя е и перпендикулярна на радиуса построен в точката на допиране;

83) Ако правите EB и DB (Фиг. 12) са допирателни и се пресичат във външна точка на окръжността, то OB е ъглополовяща на $\sphericalangle EBD$ и $EB = DB$;

III. Взаимно положение на окръжност и ъгъл:

84) Централен ъгъл: Върхът му е в центъра на окръжността а раменете му са секателни (Фиг. 13). За този ъгъл имаме $\sphericalangle AOB = \widehat{AB}$.

85) Вписан ъгъл: Върхът му лежи на окръжността, а раменете му са секателни (Фиг. 13). За него имаме:

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$$

Следствие 1: Всички вписани ъгли в една и съща окръжност, чиито рамене отсичат едни и същи дъги, са равни.

Следствие 2: Вписани ъгли чиито рамене минават през краищата на диаметър, са прави.

86) Периферен ъгъл: Върхът му лежи на окръжността, едното му рамо е допирателно а другото рамо секателно (Фиг. 13).

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

87) Ъгъл между две хорди (Фиг. 11):

$$\sphericalangle AMD = \frac{1}{2} (\widehat{AD} + \widehat{CB})$$

88) Ъгъл между две секателни (Фиг. 12):

$$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} (\widehat{AC} - \widehat{FG})$$

89) Ъгъл между две допирателни (Фиг. 12):

$$\sphericalangle EBD = \frac{1}{2} (\widehat{EACD} - \widehat{EFGD})$$

IV. Лице на кръг и частите му:

90) Лице на кръгов сектор (изрез):

Определение 1:

Част от кръг ограничен от два радиуса (Фиг. 14), се нарича кръгов сектор (изрез).

$$S = r^2 \cdot \frac{\alpha}{2}, \text{ където } \alpha \text{ е в радиани}; \quad S = \frac{\pi r^2 \alpha^0}{360^0}, \text{ където } \alpha \text{ е в градуси}$$

91) Лице на кръгов сегмент (отрез):

Определение 2:

Част от кръг ограничен от една хорда и принадлежащата и дъга (Фиг. 15), се нарича кръгов сегмент (отрез).

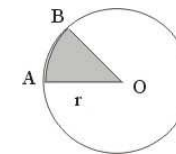
$$S_{отрез} = S_{изрез} - S_{\triangle AOB} \Rightarrow S = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), \text{ където } \alpha \text{ е в радиани};$$

$$S = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha^0}{180^0} - \sin \alpha \right), \text{ където } \alpha \text{ е в градуси}$$

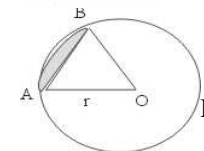
V. Многоъгълник:

92) Лице на описан многоъгълник: Лицето S на многоъгълник с периметър $2p$, описан около окръжност с радиус r е $S = pr$.

93) Лице на правилен многоъгълник:



Фиг. 14



Фиг. 15

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Бележки:

1. Ако един многоъгълник е правилен, то около него може да се опише окръжност и в него може да се впише окръжност.
2. Страната на правилен шестоъгълник е равна на радиуса на описаната около него окръжност.

$$S_n = \frac{n}{4} a^2 \cot g \frac{180^\circ}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$
, където n е броя на страните в правилния многоъгълник, a – дължината на страната, R – радиуса на описаната окръжност, r – радиуса на вписаната окръжност.