СПРАВОЧНИК ПО ГЕОМЕТРИЯ

от сашо станев

Учебен център "СОЛЕМА"
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335 ☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Триъгълници

I. Свойства на елементите в триъгълник:

1) Височините на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича ортоцентър.

2) Медианите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича медицентър. Тя разделя медианата в отношение 2:1, считано от върха на триъгълника.

3) Ъглополовящите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на вписаната в триъгълника окръжност.

4) Симетралите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на описаната около триъгълника окръжност.

Бележка:

И четирите забележителни точки, при остроъгълен триъгълник са вътрешни.

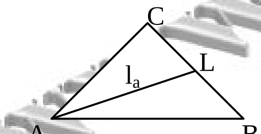
5) Ако $\gamma=90^0 \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$ (Питагоровата теорема).

6) Ако $\gamma>90^0 \Leftrightarrow a^2+b^2<c^2$.

7) Ако $\gamma<90^0 \Leftrightarrow a^2+b^2>c^2$.

8) Формула на Стюарт – За всяка точка L (Фиг. 1) от страната BC на триъгълник е в сила следната формула $AL^2=\dfrac{mb^2+nc^2}{a^2}-mn$, където BL = m, CL = n.

9) Формули за ъглополовящата: $l_a^2=bc-\dfrac{bca^2}{(b+c)^2}$



Фиг.1

(подобни формули може да се напишат и за ъглополовящите към другите страни).

10) I свойство на ъглополовящата (Фиг.1): Ако $\sphericalangle LAB=\sphericalangle LAC \Leftrightarrow \dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{AC}$ (това свойство важи, както за вътрешна, така и за външна ъглополовяща на даден ъгъл).

11) II свойство на ъглополовящата (Фиг.1): $l_a^2=AC.AB-BL.CL$.

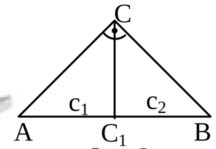
12) III свойство на ъглополовящите: $l_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\alpha}{2};l_b=\dfrac{2ca}{c+a}\cos\dfrac{\beta}{2};l_c=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

13) Формули за медианите: $4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$ (подобни формули може да се напишат и за медианите към другите страни).

14) Формули за връзка между страна и медиани: $9a^2=4\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)$ (подобни формули може да се напишат и за медианите към другите страни).

15) Средна отсечка: Ако M е среда на AC, а N среда на BC, то средната отсечка MN в ΔABC притежава следните свойства: MN||AB и $MN=\dfrac{1}{2}AB$.

II. Правоъгълен триъгълник с ∢C=90⁰ (фиг.2):



Фиг.2

16) Ако $\sphericalangle A=30^0$, то $a=\dfrac{1}{2}c$.

17) Ако CC_1 медиана, то $CC_1=\dfrac{1}{2}c$

18) Ако $CC_1 = h_c$ е височина, а $AC_1 = c_1$ и $BC_1 = c_2$ са проекциите съответно на катетите a и b върху хипотенузата, то

$a^2 = c.c_2$; $b^2 = c.c_1$ $h_c^2 = c_1.c_2$ $h.c = a.b$ $c = 2R$

19) Тригонометрични функции: $\sin\alpha=\dfrac{a}{c};\cos\alpha=\dfrac{b}{c};tg\alpha=\dfrac{a}{b};\cot g\alpha=\dfrac{b}{a}$.

20) Косинусова теорема: $a^2=b^2+c^2-2b.c.\cos\alpha$; $b^2=a^2+c^2-2a.c.\cos\beta$ и $c^2=a^2+b^2-2a.b.\cos\gamma$.

21) Синусова теорема: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$.

22) Тангенсова теорема: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

23) Теорема за проекциите: $a=b.\cos\gamma+c.\cos\beta$; $b=c.\cos\alpha+a.\cos\gamma$; $c=a.\cos\beta+b.\cos\alpha$.

24) Молвейдови формули: $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}};\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}$

III. Лице на триъгълник:

25) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ca\sin\beta$.

26) $S=\dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\dfrac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta}=\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$.

27) $S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=\dfrac{abc}{4R}$, където $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ е полупериметъра, r – радиуса на вписаната окръжност, r_a, r_b, r_c – радиусите на външно вписаните окръжности; R – радиуса на описаната окръжност.

28) Херонова формула: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където p е полупериметъра.

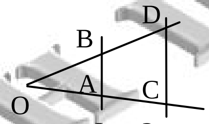
29) Лице на равностранен триъгълник: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, защото $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

30) Ако един триъгълник е разделен на няколко триъгълници, лицето му е равно на сбора от лицата на тези триъгълници.

31) Ако вписаната в произволен ΔABC окръжност допира страната му AB в точка K, като AK=x и BK=y (Фиг. 6), то $S=x.y.\cot g\frac{\gamma}{2}$.

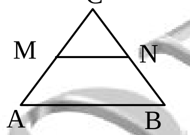
IV. Подобни триъгълници:

32) Теорема на Талес (Фиг. 3): Ако две пресичащи се прави (OC и OD) се пресичат от няколко успоредни прави (AB, CD), то отсечките от едната права са пропорционални на съответните отсечки от другата права, т.е. Ако AB||CD, то $\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}$.



Фиг.3

Следствие: Всяка права, успоредна на една от страните в даден триъгълник отсича от другите две страни пропорционални отсечки т.е. Ако MN||AB, *то* $\frac{CA}{CB}=\frac{CM}{CN}=\frac{MA}{NB}$ (Фиг. 4).



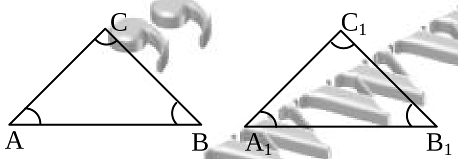
Фиг.4

33) Обратна теорема на Талес (Фиг. 3): Ако $\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}$, то AB||CD.

Следствие: Ако $\frac{CA}{CB}=\frac{CM}{CN}=\frac{MA}{NB}$, *то MN//AB.* (Фиг. 4).

34) Подобни триъгълници:

Определение: Ако $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то ∢A=∢B=∢C и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$, където k е коефициент на подобие (Фиг. 5)



Фиг.5

Признаци за подобие на триъгълници:

Два триъгълника са подобни т.е. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), ако:

I признак: Два ъгъла от единия са съответно равни на два ъгъла от другия, т.е. $∢A=∢A_1$ и $∢B=∢B_1$;

II признак: Две страни от единия са съответно пропорционални на две страни от другия и ъглите, заключени между тях са равни, т.е. $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ и $∢B=∢B_1$;

III признак: Страните на единия са съответно пропорционални на другия, т.е. $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$;

IV признак: Два правоъгълни триъгълника са подобни, ако катет и хипотенуза от един триъгълник са съответно пропорционални на катет и хипотенуза от друг триъгълник, т.е. $\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1}\Leftrightarrow \Delta\sim\Delta_1$

Свойства на подобни триъгълници:

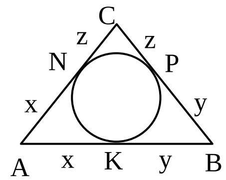
35) Ако $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), то $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{h_c}{h_{c_1}}=\frac{m_c}{m_{c_1}}=\frac{l_c}{l_{c_1}}=\frac{r}{r_1}=\frac{R}{R_1}=\frac{P}{P_1}$.

36) Ако $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (Фиг. 5), то $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$.

V. Триъгълник вписан в окръжност или описан около окръжност:

37) Нека произволен ΔABC има стани AB=c, BC=a и AC=b, и вписаната в него окръжност допира тези страни съответно в точките K, P, N (Фиг. 6). Ако означим: AK=AN=x, BK=BP=y, CP=CN=z и p – полупериметъра на ΔABC, то x=p–a, y=p–b, z=p–c.

37.1) Ако окръжност е вписана в равностранен триъгълник (Фиг. 6), то допирните му точки (т.K, т.P и т. N) са среди на съответните страни (AB, BC и AC).



Фиг.6

38) От (37) за радиуса на вписаната в правоъгълен триъгълник ($∢C=90^0$) окръжност, имаме a+b=c+2r или r=p–c.

39) Права на Ойлер: За всеки произволен триъгълник, ортоцентърът H, медицентърът M и центърът O на описаната окръжност (пресечната точка на симетралите на страните) лежат на една права, като HM = 2MO.

40) Формула на Ойлер (за намиране на разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник): Ако с d отбележим разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжност на триъгълник, с R – радиуса на описаната окръжност, а с r – радиуса на вписаната окръжност, то $d=\sqrt{R^2-2Rr}\ge 0$

Бележка:

За всеки триъгълник диаметъра на вписаната окръжност е по-малък или равен на радиуса на описаната окръжност. Затова във формулата на Ойлер равенството се получава при равностранен триъгълник (защото тогава центровете на описаната и вписаната окръжност съвпадат).

41) Връзка между радиуса на вписаната в триъгълник окръжност и трите му височини: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$.

42) За произволен триъгълник:

$$r=\frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=p.tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}$$

. За равнобедрен триъгълник:

$$r=4R\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=2R(1-\cos\alpha)\cos\alpha$$

43) За произволен триъгълник: $p=4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. За равнобедрен триъгълник: $p=4R\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=2R(1+\cos\alpha)\sin\alpha$.

44) Теорема на Лайбниц: Нека с M отбележим медицентъра на ΔABC и ако точка P е произволно избрана в пространството, то имаме изпълнени следните равенства: $PA^2+PB^2+PC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3PM^2$ или

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+3PM^2.$$

Следствие 1: Сборът от квадратите на разстоянията на произволна точка от равнината на един триъгълник до трите върха на този триъгълник има най-малка стойност, когато тази точка съвпада с медицентъра.

Следствие 2: Местоположението на точките в равнината на триъгълник, за който сборът от квадратите на разстоянията до трите върха на триъгълника е постоянен, е окръжност с център медицентърът на триъгълника.

Бележка:

Навсякъде в горните формули се използват следните означения: AB=c, AC=b, BC=a, m_a, m_b, m_c – медиани към съответните страни; l_a, l_b, l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a, h_b, h_c – височини към съответните страни; r - радиуса на вписаната в триъгълник окръжност; R – радиус на описаната около триъгълник окръжност; ∢A=α, ∢B=β, ∢C=γ.

Четириъгълници

I. Произволен четириъгълник:

45) Един четириъгълник е вписан в окръжност, когато сборът на два негови срещуположни ъгъла е равен на 180^0.

46) Центърът на описаната около четириъгълник окръжност лежи на пресечната точка на симетралите му.

Бележка:

Произволен успоредник не може да се впише в окръжност.

47) Един четириъгълник е описан около окръжност, когато сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора от другите му две страни;

48) Центърът на вписаната в четириъгълник окръжност, лежи на пресечната точка на ъглополовящите на ъглите му.

Бележка:

Произволен успоредник не може да се опише около окръжност.

49) Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството OA.OC=OB.OD, където O е пресечната точка на диагоналите му;

50) Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството MA.MB=MC.MD, където M е пресечната точка на продълженията на срещуположните му страни AB и CD;

51) За всеки четириъгълник ABCD (където AB=a, CD=b, AD=c, BC=d са страните, а $AC=d_1$, $BD=d_2$ – диагоналите му) е изпълнено следното неравенство: $ac+bd\geq d_1d_2$, като равенството се изпълнява тогава и само тогава, когато четириъгълникът е вписан в окръжност.

Първа теорема на Птоломей: Произведението от диагоналите на всеки вписан четириъгълник е равно на сбора от произведенията на срещуположните страни т.е. $d_1d_2=ac+bd$.

Втора теорема на Птоломей: Диагоналите във всеки вписан четириъгълник се отнасят помежду си както сборовете от произведенията на страните, пресичащи се в краищата на съответния диагонал т.е. $\frac{d_1}{d_2}=\frac{ab+cd}{bc+ad}$.

52) Нека точките C и D лежат в една и съща полуравнина относно правата AB и "виждат" отсечката AB под един и същи ъгъл. Тогава точките A, B, C и D лежат на една окръжност;

53) При последователно съединяване средите на страните на произволен четириъгълник се получава успоредник.

54) Във всеки четириъгълник отсечките, които съединяват средите на две срещуположни страни, и отсечката, която съединява средите на диагоналите, се пресичат в една точка, която разполовява всяка от тях.

55) За всеки четириъгълник ABCD (където AB=a, CD=b, AD=c, BC=d, $AC=d_1$, $BD=d_2$, $\sphericalangle AOB=\varphi$, където O е пресечната точка между диагоналите му), диагоналите му са взаимно перпендикулярни тогава и само тогава, когато сборът от квадратите на всеки две негови срещуположни страни е равен на сбора от квадратите на другите две срещуположни страни т.е. $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)=2d_1d_2\cos\varphi$.

II. Лице на произволен четириъгълник:

56) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}$, където p е полупериметъра на четириъгълника, а φ – ъгълът между диагоналите.

57) Описан четириъгълник: $S=pr=\sqrt{abcd}.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

58) Вписан четириъгълник: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$;

59) Четириъгълник едновременно вписан и описан за окръжност: $S=\sqrt{abcd}$;

III. Успоредник:

60) Сборът от квадратите на страните на всеки успоредник е равен на полусбора от квадратите на диагоналите му т.е. $2(a^2+b^2)=d_1^2+d_2^2$;

61) Ако α е остър ъгъл от успоредник, а d_1 и d_2 са диагоналите му, то $\cos\alpha=\frac{|d_1^2-d_2^2|}{4ab}$;

62) Ако φ е остър ъгъл между диагоналите на успоредник, то $\cos\varphi=\frac{|a^2-b^2|}{d_1.d_2}$;

63) Лице на успоредник: $S=ah_a=bh_b=ab\sin\alpha=\frac{1}{4}(d_1^2-d_2^2)tg\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, където d_1 е по-големия диагонал, а φ е остър ъгъл между диагоналите му.
Следствие: От всички успоредници с едни и същи страни a и b най-голямо лице има правоъгълникът (защото $\alpha=90^0$).

Бележки:

1. Успоредникът е вид четириъгълник, затова всички твърдения изказани по-горе за четириъгълник важат и за успоредник.
2. В успоредникът неможе да се впише и опише окръжност (виж (45) и (46)).

64) Видове успоредници:

64.1) Ромб:

64.1.a) Диагоналите му са перпендикулярни и ъглополовящи на прилежащите му ъгли, затова центъра на вписаната окръжност съвпада с пресечната им точка т.е. $h_a=h_b=2r$. За тях важат следните равенства: $d_1=2a\cos\frac{\alpha}{2}$; $d_2=2a\sin\frac{\alpha}{2}$;

64.1.b) За всеки ромб е в сила равенството: $d_1^2+d_2^2=4a^2$ (виж (60));

64.1.c) Лице: $S=ah=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2$ (виж (63));

64.1.d) Не може да се опише окръжност (виж (45));

64.2) Правоъгълник:

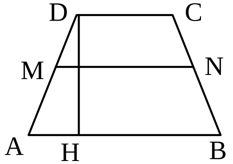
64.2.a) За диагоналите му е в сила $d_1=d_2=\sqrt{a^2+b^2}$ (виж (60));

64.2.b) Не може да се впише окръжност (виж (47)), а радиуса на описаната окръжност е равна на половината от диагонала;

64.2.c) $S=ab=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$

IV. Трапец:

65) Средна отсечка – Нека точките M и N са среди съответно на бедрата AD и BC на трапеца ABCD (Фиг. 7), то средната отсечка MN притежава следните свойства:
MN || AB || CD и $MN=\frac{AB+CD}{2}$.



Фиг.7

66) Нека за равнобедрен трапец ABCD (фиг. 7) имаме означенията AB = a, CD = b, DH – височина, тогава

$AH = \frac{a-b}{2}$; $BH = \frac{a+b}{2}$.

67) За сбора от квадратите на диагоналите за всеки трапец е изпълнено: $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$, а за разликата им – $d_1^2 - d_2^2 = \frac{a+b}{a-b}\left(d^2 - c^2\right)$, където a и b са основи, c и d – бедра, d_1 и d_2 – диагонали на трапеца

Бележка:

> За равнобедрен трапец имаме $d_1=d_2$, d=c и първата формула (виж (67)) добива вида $d_1^2=c^2+ab$

68) Ако един трапец е вписан в окръжност, то той е равнобедрен т.е. около всеки равнобедрен трапец може да се опише окръжност;

69) Центъра на описаната около трапец окръжност лежи на пресечната точка на симетралите (симетралите на голямата и малка основа съвпадат).

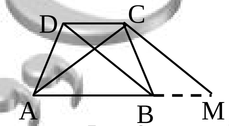
70) Центъра на вписаната в трапец окръжност лежи на пресечната точка на ъглополовящите му, като ъгълът между ъглополовящите на два прилежащи ъгъла е равен на 90^0;

70.1) При произволен трапец центърът на вписаната окръжност лежи на средната му отсечка (виж: Многоъгълник, Зад. 27);

70.2) При равнобедрен трапец центърът на вписаната окръжност разполовява средната отсечка;

70.3) При равнобедрен трапец симетралите на голямата и малката основа съвпадат, като центърът на вписаната в трапеца окръжност лежи върху нея (виж СУ, 1996 – I изпит);

71) Ако през точка C построим отсечка CM успоредна на диагонала BD (Фиг. 8), то ΔACM и трапеца ABCD са равнолицеви т.е. $S_{\Delta ACM}=S_{ABCD}$. Ако през точка D построим отсечка DM успоредна на бедрото BC, то получаваме $S_{ABCD} = \frac{a+b}{a-b} S_{\Delta ADM}$;



Фиг.8

72) Радиус на вписана в равнобедрен трапец окръжност – $4r^2=ab$;

73) Ако имаме трапеца ABCD, то лицето му е $S = \frac{a+b}{2}h$ = MN h = (a + b) r, защото h=2r. Ако трапеца е равнобедрен, то S=2cr;

74) Теорема на Щайнер – Във всеки трапец средите на основите, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продължението на бедрата лежат на една права – права на Щайнер.

74.1) Обратна теорема на Щайнер – За всеки четириъгълник, ако среда на основата, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продължението на бедрата лежат на една права, то четириъгълника е трапец.

Ъгли. Окръжност и кръг

I Ъгли с взаимно успоредни или взаимно перпендикулярни рамене

75) Ако два ъгъла са с взаимно успоредни рамене и

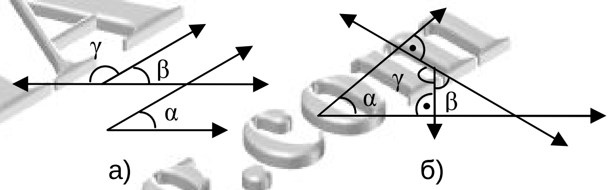
75.1) са от един и същи вид, те са равни, т.е. α=β (Фиг. 9 а).

75.2) не са от един и същи вид, то сборът им е равен на 180^0, т.е. $α+γ=180^0$ (Фиг.9 а).

76) Ако два ъгъла са с взаимно перпендикулярни рамене и

76.1) са от един и същи вид, те са равни, т.е. α=β (Фиг. 9 б).

76.2) не са от един и същи вид, то сборът им е равен на 180^0, т.е. $α+γ=180^0$ на Фиг.9 б).



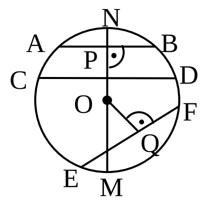
Фиг. 9

II. Взаимно положение на права и окръжност:

Определения:

> 1. Хорда: Права която свързва две произволни точки от окръжността.
> 2. Секателна: Права която има две общи точки с окръжността.
> 3. Допирателна: Права която има една обща точка с окръжността.

77) Ако диаметър е перпендикулярен на хорда в окръжност, то той разполовява хордата и съответната и дъга т.е. Ако MN ⊥ AB ⇔ AP=BP; $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$ и $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$ (Фиг. 10);



Фиг.10

Следствие:

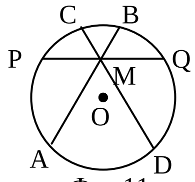
> Ако една права минава през средата на хорда и съответната и дъга, то тя минава и през центъра на окръжността и е перпендикулярна на хордата.

78) Ако AB || CD ⇔ AC=BD и $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ (Фиг. 10);

79) Ако AB=EF ⇔ OP=OQ и $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ (Фиг. 10);

80) Нека AB, CD, PQ са хорди, които се пресичат в точка M (Фиг. 10) и нека PQ е перпендикулярна на диаметъра, то $AM.MB=CM.DM=PM^2=QM^2$;

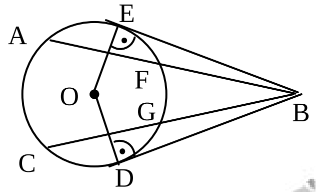
81) Ако точка B (Фиг. 12) е външна за окръжността, правите AB и CB са секущи и EB допирателна, то $FB.AB=GB.CB=EB^2$;



Фиг.11

Бележка:

Обратните теореми на твърдения (виж (79) и (80)) ни дават достатъчните условия четири (или три) точки да лежат на една окръжност.

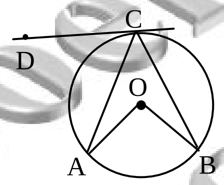


Фиг.12

82) Ако права е допирателна до окръжност, то тя е и перпендикулярна на радиуса построен в точката на допиране;

83) Ако правите EB и DB (Фиг. 12) са допирателни и се пресичат във външна точка на окръжността, то OB е ъглополовяща на ∢EBD и EB=DB;

III. Взаимно положение на окръжност и ъгъл:



Фиг.13

84) Централен ъгъл: Върхът му е в центъра на окръжността а раменете му са секателни (Фиг. 13). За този ъгъл имаме ∢AOB=$\overset{\frown}{BD}$.

85) Вписан ъгъл: Върхът му лежи на окръжността, а раменете му са секателни (Фиг. 13). За него имаме:

∢ACB= $\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{AB}$ = $\frac{1}{2}$ ∢AOC

Следствие 1: Всички вписани ъгли в една и съща окръжност, чиито рамене отсичат едни и същи дъги, са равни.

Следствие 2: Вписани ъгли чиито рамене минават през краищата на диаметър, са прави.

86) Периферен ъгъл: Върхът му лежи на окръжността, едното му рамо е допирателно а другото рамо секателно (Фиг. 13).

∢ACD= $\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{AC}$

87) Ъгъл между две хорди (Фиг. 11):

∢AMD= $\frac{1}{2}$ ($\overset{\frown}{AD}$+$\overset{\frown}{CB}$)

88) Ъгъл между две секателни (Фиг. 12):

∢ABC= $\frac{1}{2}$ ($\overset{\frown}{AC}$–$\overset{\frown}{FG}$)

89) Ъгъл между две допирателни (Фиг. 12):

∢EBD= $\frac{1}{2}$ ($\overset{\frown}{EACD}$–$\overset{\frown}{EFGD}$)

IV. Лице на кръг и частите му:

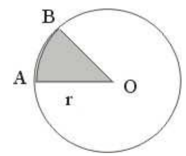
90) Лице на кръгов сектор (изрез):

Определение 1:

Част от кръг ограничен от два радиуса (Фиг. 14), се нарича кръгов сектор (изрез).

$S = r^2 . \frac{\alpha}{2}$, *където α е в радиани;* $S = \frac{\pi r^2 \alpha^0}{360^0}$, *където α е в градуси*

91) Лице на кръгов сегмент (отрез):



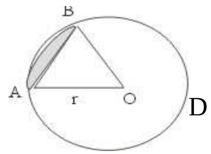
Фиг.14

Определение 2:

Част от кръг ограничен от една хорда и принадлежащата и дъга (Фиг. 15), се нарича кръгов сегмент (отрез).

$S_{отрез} = S_{изрез} - S_{\Delta AOB} \Rightarrow S = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$, *където α е в радиани;*

$S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$, *където α е в градуси*



Фиг.15

V. Многоъгълник:

92) Лице на описан многоъгълник: Лицето S на многоъгълник с периметър 2p, описан около окръжност с радиус r е S=pr.

93) Лице на правилен многоъгълник:

Бележки:

1. Ако един многоъгълник е правилен, то около него може да се опише окръжност и в него може да се впише окръжност.
2. Страната на правилен шестоъгълник е равна на радиуса на описаната около него окръжност.

$S_n = \frac{n}{4}a^2 \cot g \frac{180^0}{n} = \frac{n}{2}R^2 \sin \frac{360^0}{n} = \frac{n}{2}r^2 tg \frac{180^0}{n}$, където n е броя на страните в правилния многоъгълник, a – дължината на страната, R – радиуса на описаната окръжност, r – радиуса на вписаната окръжност.